数理解析研究所講究録
第145巻 1972年 48-60

正規定常過程のマルコフ性と超函数

阪大理　岡部靖憲

§1. 序

函数 $\Delta(a)$ が与えられたとき、それを基本解にもつ微分作用素；

$$(1.1) \qquad Q\left(\frac{d}{da}\right)\hat{\Delta} = \delta$$

を見つけることが、確率論、特に正規定常過程論、において重要な位置を占めることをお話したいと思います。

その研究過程において、Q の半分の作用素；

$$(1.2) \qquad Q = P^{*}P$$

なる P を見つけることが key point であることがお分りいただけると思います。

そして、その P を探すことと、その確率論的意味を、微分方程式論的に解明するためには、どうしても佐藤幹夫氏の超函数論が必要であることもお分りいただけると思います。

§2. 正規定常過程

$\Delta(a)$ を $\mathbb{R}^1$ 上の偶函数で、正で $L^1(\mathbb{R}^1)$ に属する non-trivial な函数とする。

そのとき、

$$(2.1) \qquad k(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^1} e^{-itа} \Delta(a)\,da$$

が連続な正定符号函数になるので、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された実正規定常過程 $\mathbb{X} = (X(t), t \in \mathbb{R}^1)$ で、平均が 0 で、

$$(2.2) \qquad E(X(t)X(s)) = k(t-s)$$

をみたすものが、一意的に定まります。

$\mathbb{X}$ が正規定常過程とは、

任意の $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対して、

(2.3)　有限次元分布 $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ $(\in \mathbb{R}^n)$ が
正規分布に従い、

(2.4)　$(X(t_1), \cdots, X(t_n))$ と $(X(t_1+h), \cdots, X(t_n+h))$
の分布が等しい $(\forall h \in \mathbb{R})$

ときをいいます。

なお、(2.2) の左辺の意味は、$X(t)$ と $X(s)$ の $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ における内積のことです。

§3. 正規定常過程の表現

正規定常過程 $\mathbb{X} = (X(t),\ t \in \mathbb{R}^1)$ に対して、次の Borel field $(\subset \mathcal{B})$ を定義する。

$$
(3.1)\quad \begin{cases} \mathcal{B}^{-\infty t} \equiv \{X(s)\,;\, s \leq t\} \text{ を可測にする最小の } \sigma\text{-algebra} \equiv \sigma(X(s);\, s \leq t) \\ \mathcal{B}^{t\infty} \equiv \sigma(X(s);\, s \geq t) \qquad (t \in \mathbb{R}^1). \end{cases}
$$

$\mathbb{X}$ の構造を調べる際に、$\mathbb{X}$ が purely-non deterministic、即ち

$$
(3.2)\quad \bigcap_{t \in \mathbb{R}^1} \mathcal{B}^{(-\infty, t)} = \text{trivial field}
$$

が成り立つ場合を調べることが重要であり、prediction の観点からはこれで十分でもある。そのとき、$\Delta(a)$ が Hardy weight, 即ち、

$$(3.3) \qquad \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\log \Delta(a)}{1+a^2}\, da > -\infty$$

が成り立ち、さらに、

$$(3.4) \qquad \Delta(a) = |h(a)|^2, \qquad h \in H^{2+}$$

なる $h(a)$ $(\in \mathbb{C})$ が存在する

ことが知られている。

そこで、H^{2+} とは

$$(3.5) \qquad H^{2+} = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^+) \,;\, \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(a+iy)|^2 da < \infty \right\}$$

のことです。

一方、定常過程論において、

$$(3.6) \qquad X(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-ita}\, dW(a)$$

と $\Delta(a)da$ に従う直交測度 $dW(a)$ によって表わされることは知られている。

$dW(a)$ とは、 $\{W(E,\omega);\int_E \Delta(a)da<\infty\}$ なる正規確率過程で、

(3.7) $$E(W(E,\omega)^2)=\int_E \Delta(a)da$$

(3.8) $(E_j;j=1,\cdots,n)$ disjoint $\Rightarrow (W(E_j);1\le j\le n)$ 独立

をみたすものからきまる random measure のことです。 従って、 (2.8) をみたす任意の h をひとつとってきて、

(3.9) $$\hat{B}(E,\omega)\equiv\int_E \frac{1}{h(a)}dW(a,\omega)\ ,\ |E|<\infty$$

と変換することによって、 da に従う正規 random measure (≡ Brown motion よりきまる random measure) $d\hat{B}(a)$ が得られ、 (2.10)より

(3.10) $$X(t)=\int_{\mathbb{R}^1} e^{-ita}h(a)\,d\hat{B}(a)$$

と表わされるが、さらに、 Planchel の定理によって、

(3.11) $$E(t)\equiv\int_{\mathbb{R}^1} e^{-ita}h(a)da\equiv\hat{h}(t)$$

(3.12) $$B(d\lambda)\equiv\int_{\mathbb{R}^1}\left(\int_{d\lambda} e^{+ia\lambda}d\lambda\right)d\hat{B}(a)$$

とおくことによって、 da に従う正規 random measure $dB(a)$ によって、

$$(3.13) \qquad X(t) = \int_{\mathbb{R}^1} E(t-u)\, dB(u)$$

と表現されることが分る。

h が H^{2+} の元であるから、

$$(3.14) \qquad E(t) = 0 \qquad (t<0)$$

が成り立つので、 表現 (2.17) より、 $\forall t \in \mathbb{R}^1$ に対して、

$$(3.15) \qquad \sigma(X(s);\, s \leq t) \subset \sigma(B(du);\, du \subset (-\infty, t])$$

が成り立つが、 逆の包含関係が成り立つためには、 (2.8) における h はいかなるものでなければならないかは、 Karhunen によって次の様に解かれた.

<u>定理</u> (Karhunen) (3.15) において等号が成り立つための必要十分条件は、

(3.16) h が outer であること、即ち

$$h(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^1} \frac{1+az}{a-z}\, \frac{\lg \Delta(a)}{1+a^2}\, da\right] \quad (z \in \mathbb{C}^+)$$

っ 絶対値1の定数倍.

である。

§4 正規定常過程のマルコフ性

マルコフ過程のマルコフ性とは、過去と未来とが現在で条件をつけたとき独立、即ち

$$(4.1)\qquad \mathcal{B}^{-\infty 0} \underset{\sigma(X(0))}{\perp} \mathcal{B}^{0\infty}$$

のことですが、必ずしも現在だけではなく、いわば"現在の germ"で条件を付けたときに独立ということで、正規定常過程のマルコフ性を定義することにします。

詳しくいうと、

$$(4.2)\qquad \mathcal{B}^{0+} \equiv \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{B}(X(t);\ |t|<\varepsilon)$$

でもって、原点の germ field を定義し、正規定常過程 $\mathbb{X} = (X(t),\ t\in\mathbb{R}^1)$ がマルコフ性をもつとは

$$(4.3)\qquad \mathcal{B}^{-\infty 0} \underset{\mathcal{B}^{0+}}{\perp} \mathcal{B}^{0\infty}$$

が成り立つ ときを いうことにします。

そのとき、 Karhunen の 結果を ふまえて、 $\Delta(a)$ の outer part $h(a)$ の条件によって、 $\mathbb{X}$ の マルコフ性 の 特徴付けを 与えたのが、 Levinson - Mckean であり、それは 次の様に 述べられる。

<u>定理</u> (Levinson - Mckean) $\mathbb{X}$ が マルコフ性をもつための必要十分条件は、次の条件 (4.4) ~ (4.5) を みたす infra-exponential type の entire function $P(\zeta)$ が 存在することである:

(4.4) $$P(ix) \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^1)$$

(4.5) $$h(x) = \frac{1}{P(-ix)} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^1).$$

§5 正規定常過程と 超函数

我々の 目標は 次のことです。

$\mathbb{X}$ が マルコフ性 を もつとき、 (3.16) における h が (4.4), (4.5) を みたすことが 必要十分であると Levinson - Mckean が示しましたが、それを 微分方程式論的に 取り扱って、 (4.4), (4.5) を

みたすとき、 $\mathbb{X}$ が マルコフ性 をもつことを示したいと思います。

証明の粗筋

(3.4), (3.5), (4.4) と (4.5) によって、

$$(5.1) \qquad P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta \quad \text{in} \quad R(D'),$$

但し、 $R(D')$ は $D' = [-\infty, \infty]$ 上の Fourier 超函数、が成り立ち、 このことより、 (3.13) は、

$$(5.2)' \qquad P\left(\frac{d}{dx}\right)X(x) = B'(x) \quad \text{in } R(D')$$

と、hyperfunction の世界において成り立つ。

そのとき、我々が示す目標は、 (5.2)の解である $X(x)$ が何故、 (4.3) の意味でマルコフ性をもつことになるかを示すことである。

$$(5.3) \qquad \mathcal{B}^{+/-} \equiv \sigma\left(E(X(t)|\mathcal{B}^{-\infty 0}) \; ; t>0\right)$$

とおくとき、

$$(5.4) \qquad \mathcal{B}^{+/-} \subset \mathcal{B}^{-} \equiv \mathcal{B}^{-\infty 0}$$

$$(5.5) \qquad \mathcal{B}^{-} \underset{\mathcal{B}^{+/-}}{\perp} \mathcal{B}^{+} \equiv \mathcal{B}^{0\infty}$$

$$(5.6) \qquad \mathcal{B}^{0+} \subset \mathcal{B}^{+/-}$$

が一般に成り立つことに注意すれば、(4.3)を示すためには、 $\forall t > 0$ に対して、

(5.7) $E(X(t)|\mathcal{B}^-)$ が $\mathcal{B}^{0+}$-可測である

ことを示せばよい。 Karhunenの定理によって、

(5.8) $$E(X(t)|\mathcal{B}^-) = \int_{-\infty}^{0} E(t-u)\,dB(u)$$

が成り立つことに注意して、

$Y(x) \in \mathcal{B}((0,\infty))$ を $\int_{-\infty}^{0} E(t-u)\,dB(u)$ の定める hyperfunction とし、 hyperfunction の flabbyness によって、

$$Z(x) = \begin{cases} Y(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

なる hyperfunction $Z(x)$ を考えると、 P が local operator であることと、(5.1)と Z の定義より、 $P(\frac{d}{dx})Z$ は原点に support をもつ hyperfunction になるので、そのような hyperfunction の構造定理によって、ある infra-exponential type の entire function Q が存在して、

(5.9) $$P(\tfrac{d}{dx})Z = Q(\tfrac{d}{dx})\delta$$

が成り立つ。

従って、　(5.1)より、

(5.10)　$$Z = (Q\delta) * E$$

が成り立つ。　次に、

(5.11)　$$Q\delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\omega)\,\delta^{(n)}$$

とすると、　$Y(x)$, $Z(x)$の定義と　(5.10)より、　$\forall t>0$

に対して、

(5.12)
$$\begin{aligned}E(X(t)\,|\,\mathcal{B}^{-\infty 0}) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(Y(t+i\varepsilon) - Y(t-i\varepsilon)\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(Z(t+i\varepsilon) - Z(t-i\varepsilon)\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\omega)\big(E^{(n)}(t+i\varepsilon) - \\ &\qquad - E^{(n)}(t-i\varepsilon)\big)\Big)\end{aligned}$$

が成り立つが、　$C_n(\omega)$　は、　Y, Zの定義と

(5.9)　より、　Laurent展開の一意性によって、

(5.13)　$C_n(\omega)$　は　$\mathcal{B}(Y(t);\ 0<t<\varepsilon)$　$(\forall\varepsilon>0)$-可測である

ことが従う。　一方、

(5.14)　$$\mathcal{B}^{0+} \subset \mathcal{B}^{-} \cap \mathcal{B}^{+} \subset \mathcal{B}^{-}$$

に注意して、

(5.15)　$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{B}(Y(t);\ 0<t<\varepsilon) \subset \mathcal{B}^{0+}$$

が成り立つので、　(5.12),　(5.13),　(5.15)　より、

$E(X(t)\,|\,\mathcal{B}^{-\infty 0})$ が　$\mathcal{B}^{0+}$-可測であることが成り立つ。

即ち (5.7) が成り立ち、$\mathbb{X}$ がマルコフ性をもつことが示された。 Q.E.D

§6. $\hat{\Delta}(a)$ を基本解とする微分作用素

§1 において述べたことに言及したいと思います。話は、§4 において述べたマルコフ性をもつ正規定常過程に限ります。一般のときは、pseudo-differential operator の理論の中におさまると思いますが、別の機会にしたいと思います。

(3.4) と (3.11) より、

$$(6.1) \qquad k = E * \check{E}$$

但し、$\check{E}(t) \equiv E(-t)$

が成り立ち、従って、(5.1) より、

$$(6.2) \qquad Q \equiv P^* P$$

と local operator を定義するとき、

$$(6.3) \qquad Q\, k = \delta$$

が hyperfunction の世界で成り立つ。

(6.2) よりして、　Q は

$$(6.4) \qquad Q = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell \frac{d^{2\ell}}{dt^{2\ell}}$$

$$(6.5) \qquad \lim_{\ell\to\infty} \sqrt[2\ell]{(2\ell)!\,|C_\ell|} = 0$$

をみたす.

なお、多変数の場合の考察は 別の機会に報告したいと思います.

参考文献

[1] K. Karhunen, Über die struktur stationärer zufälliger funktionen, Ark. Mat., 1 (141–160), 1950

[2] N. Levinson – H.P. McKean, Jr., Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, Acta. Math., 112 (99–143), 1964

[3] M. Sato. Theory of hyperfunctions, I, J. of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo, 8 (139–193), 1959