数理解析研究所講究録
第145巻 1972年 157-167

A Survey of the Theory of Linear (Pseudo-) Differential Equations from the View Point of Phase Functions —— Existence, Regularity, Effect of Boundary Conditions, Transformation of Operators, etc.

河合 隆裕　　京大・数理研

0. ここ2年程の内に線型偏微分方程式の局所理論は完全に面目を一新した。その進展の最大の原動力は偏微分方程式論において再び幾何学的観点、即ち characteristic surface あるいは更に bicharacteristics を解の構成要素として眺める立場、が定着したことにある。この意味において浜田[1]の仕事は如何に評価しても評価しすぎということはない。本講演では実領域での理論について述べる。そこでは標題のような問題が極めて自然な形でしかもさしたる困難なく取り扱えることを理解していただくのを目標とする。

我々の今後の課題は次の4点にあると考える。(実領域において。)

1° 局所理論における simple characteristics の仮定を如何に弱めるか。

2° 理論の整備（たとえば Nirenberg - Treves の $k=\infty$ の case の我々流の取扱い。）

3° 過剰決定系 への拡張

4° 理論の大域化.

これ等の内. 多分1°は超函数論によってのみ可能であろう。いずれにせよ 1°, 2° は既にさして面白くはない。3°については 佐藤の指摘するように 未知函数1ヶの時は我々の射程距離内に既に問題は入っていよう。又. 成木の講演はよい方向を我々に示唆してくれた。多分 2°〜4° は Hörmander の現在の目標でもあろう。

本講演の内容は. 近日中に. 河合 及び 柏原 = 河合 の仕事が発表される予定なので、詳しくはそちらに譲りたい。尚かなりの部分は既に学士院紀要で announce されている。

以下 各節毎に. いくつかの目新しいと思われる点のみ 簡単に触れておく。必らずしも重要な所を拾い出したのではない。

1. Existence and Regularity

この部分については 9月の シンポジウム後 2, 3 の細部に渡る改良（特に Nirenberg - Treves の条件 で $k=2p$ の時の正則性定理；但し kが odd の時にまだ証明が（Nirenberg - Treves 流の言葉では）完成していない。（尚下の定理参照。）と 柏原＝河合 [1] で展開された擬微分作用素の理論の応用，という面での進展があった。これについては 12月の東京シンポジウムで話したので ここでは（その後得た）次の佐藤予想に対する部分的解答を記すにとどめる。

定理．今 P の phase function $\varphi(x, y, \xi)$ で次の条件を満たす物があると仮定する。

(i) $P_m(y,\ \mathrm{grad}_y\,\varphi(x, y, \xi)) = P_m(y, \xi)$

(ii) $\mathrm{Im}\,\varphi(x, y, \xi) \geq 0 \quad$ if $\mathrm{Re}\,\varphi(x, y, \xi) = 0$

(iii) $\mathrm{Im}\,\varphi = 0 \implies x = y$

この時 $(x_0, x_0, \xi_0, -\xi_0)$ の近傍で定義された ある pseudo-differential operator Qが存在して $Qf = 0 \iff \exists u$ s.t. $Pu = f$ (註)

証明は P^* に対して φを元（もと）にしてよい基本解を構成する。佐藤の理論の偏微分方程式論における有効性のよく判る定理である。尚近日中に3節を用いて理論の全面的改良が為される予定である。

註）即ち non-solvable な operator の range の決定。

2. Effect of Boundary Conditions

これについては、問題は2つに分れる。即ち、正則解の在り方に重点をおくか、あるいは特異性（又は波動）の伝播に重点を置くかである。

(2) 正則解について。

これには、小松－河合[1] 及び 柏原－河合[1] を合わせ用いる。問題は次の通り。

◎ $P(x, D)$ を linear elliptic differential operator とせよ。この時 $Pu=0$ $(x_1>0)$ の解 u の $x_1=+0$ としての trace はいかなる関係を満たすか。更に一般に、elliptic と限らずに $P(x,D)u=0$ $(x_1>0)$ の解が $x_1>0$ で正則であるための trace の条件は何か？（この最後の問題は小松による。）

これは次のように取り扱える。 $\tilde{u} \underset{\text{Df.}}{=} \begin{cases} u & (x_1>0) \\ 0 & \end{cases}$

なる u の適当な拡張に対して

$$P\tilde{u} = \sum_{j=0}^{m-1} \mu_j(x') \otimes \delta^{(j)}(x_1) \qquad (x'=(x_2, \cdots, x_n))$$

とできる。そこで、これに P の左逆 E を作用させる。その時 $S.S.\ \mu_j(x') \subset I \subset S^*\{x_1=0\}$ とし、$(x', \xi') \in I$

ならば $P_m(0,x',\xi_1,\xi')=0$ の根 $\{\xi_1^j\}_{j=1}^m$ の中 $j=1,\dots,p$ について $\mathrm{Im}\,\xi_1>0$. 他は <0 としよう。そうすれば R^- 原 $\prod_{j=p+1}^m(\xi_1-\xi_1^j)$ とすれば

$$(R^-)^{-1}(\mu_j(x')\otimes\delta^{(j)}(x_1))\Big|_{+0}=0$$

よって $R^-R^+\sim P$ 故 $R^+u\big|_{x_1=+0}=0$. これが u が $x_1>0$ での解であることより導かれる結果である。

一般に P が elliptic でない時は その elliptic factor について上の議論をし. hyperbolic factor について初期値問題 (I-hyperbolicity) として扱えばよい。但しその為には. P_m が real coeff. あるいは P_m が const. coeff. のいずれかでないと完全な議論は complicated である。

(6) 混合問題についての注意。

最近 松村[1]は混合問題の解の特異性について興味深い議論を展開した。その結果の補い(特に松村[1]は singular support を下から評価しているのに対し. 上から評価すること)をすることは可能である。中で一つ興味深いかと思われるのは, 次の事実である。

◎ $P=P(D)$ を simple characteristics とする。

この時 boundary $\{x_n=0\}$ での波の反射の際、
$\partial P_m/\partial \xi_n = 0$ なる成分は $\{t=\infty\}$ でしか影響しない。よって、波の様相を記述する際、その時影響は除いて考えうる。

これは正に層 $\mathcal{C}$ が出でて初めて解明される事実である。

変数係数でも 浜田 [1] により $\partial P_m/\partial \xi_n \neq 0$ なる条件の下で波の伝播の様子は記述できるが、この場合は考察は不十分である。

尚、この機会に定数係数の作用素に関する考察に必要な次の問題をどなたか代数幾何の方に解いて頂けないかと思い、一寸記しておきます。

◎ $P(\zeta)$ を斉次多項式とする。今 $P_\xi(\eta)$ を次のように定義する: $P(\xi+t\eta) = t^q P_\xi(\eta) + O(t^{q+1})$ $(\xi\neq 0)$ $(|t|\ll 1)$ (Localization of P; due to Atiyah-Bott-Gårding)

今適当に ϑ_ξ を選んで $P_\xi(\eta)$ が ϑ_ξ 方向に双曲型,(即ち $P_\xi(\eta+t\vartheta_\xi)=0 \Rightarrow t\in\mathbb{R}$). と $\forall\xi$ に対して出来る $P(\zeta)$ の characterization は?

知られている 2つの十分条件は次の通り。

(i) $P(\zeta)$ が real coeff. かつ $\mathrm{grad}_\zeta P\neq 0$ if $P(\zeta)=0$
(ii) P が hyperbolic (Atiyah-Bott-Gårding による。)

3. Transformations of Operators

やや奇妙に見える標題だが、目標は次の通りである。

◎適当な'座標変換'により考えている微分作用素を簡単な形に直したい。

これは，古典的に一階偏微分方程式は接触変換によりtrivialな作用素 $\partial/\partial x$ に変換されたことのanalogyである。我々はsimple characteristicsの作用素のみを考えており本質的には (i.e. C levelでは、) 一階擬微分作用素のみを対象としていることになるから大いにplausibleな話である。実際それらは、Hörmander [1]，Nirenberg-Treves [1] 河合 [1], [2] 等が基本解の構成その他に用いている物である。しかし、それを明確に意識したのは、Egorov [1] 及び柏原 [1] である。(接触変換として)

最近 Hörmander [2] はその方向に沿って極めて詳細な研究を行った。(*) その結果は (phase functionについて) 柏原-河合 [1] の方法と合わせて 柏原-河合 [2] の基礎となった。

そこで述べられているのは、本質的には次の事実である。

◎ 主要部が実の simple characteristic な線型微分方程式は特異性の観点からする限り

(*) 註 それは、倉西-熊ノ郷による Multiple symbol の拡張とも言えることに注意しておく。

実は $\partial/\partial x_1$ しか無い：Egorov - Hörmander 及び佐藤により我々はこのさわやかなる境地に達し得たのである。私には夏の夜明けに草露を踏むかの如き感がする……。

文献

Egorov [1] On cannonical transformations of pseudo-differential operators, Uspehi Mat. Nauk. 25. 235-236 (1969)

河田 [1] The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 5. 21-40 (1969)

Hörmander [1] On the singularities of partial differential equations, Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Univ. of Tokyo Press, 1969, pp. 31-40.

——— [2] Fourier integral operators. I. Acta Math. 127. 79-183 (1971)

柏原 [1] 超函数論の個人的展望，数学の歩み，16，108－112 (1971)

柏原－河合 [1] Pseudo-differential operators in the theory of hyperfunctions, Proc. Japan Acad. 46, 1130－1134 (1970)

——— [2] Ibid. II. To appear

河合 [1] Construction of a local elementary solution for linear partial differential operators. I. Proc. Japan Acad. 47. 19－23 (1971)

—— [2] Ibid. II. ibid. 147－152 (1971)

小松・河合 [1] Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7, 95－104 (1971)

松村 [1] Localization theorem in hyperbolic mixed problems, Proc. Japan Acad. 47 115－119 (1971)

追記（1971.12）(a) 双曲型方程式の Green 函数の特異性についての考察中 p.6 に述べた以外の結果として次の２つの場合がある。

1° $P(D)=P_m(D)$ の localization が高々2階の時

2° $P(x,D)$ が一階対称双曲系であって所謂 Shadow condition が満たされる時.

特に 2° についての議論はかなり面白く思われる。これらについては別の機会に詳述したい。

(b) 最初に提起した問題中 1°, 3°, 4° については理論は著しく進歩した。それについては近日刊行予定の Springer の Lecture note の佐藤・河合・柏原、及び河合のノートを見られたい。又、4° については、河合, On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations. I and II. Proc. Japan Acad. **47**, 537-540 and 643-647 (1971) 参照。又、文献中河合 [1], [2] については、

河合, Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I) —— The case with real principal symbols ——, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7, 363-396 (1971) 及び

河合, Ibid. (II) —— The case with complex principal symbols ——, Ibid. 397-424 (1971)

をも参照されたい。