数理解析研究所講究録
第146巻 1972年 82-88

マルコフ過程の調和測度に関するいくつかの結果について

広大　神田　護

従来のポテンシャル論を背景としたマルコフ過程論は Hunt によりそのワク組が設定され，比較的最近の Blumenthal-Getoor の著書に見られるように"ワク"としてはほぼ整備されたといってよい。しかし，マルコフ過程が分ったと我々が云えるかどうかは疑問である。(どのようになったら"分った"といえるのかは問題だが アイマイな云い方だが Feller による1次元拡散過程の理論の水準位にマルコフ過程論がうちたてられたら…)．たとえば Hunt の理論のワク内では，退化した微分作用素の場合もそうでない場合も 同じ次元で扱われる。という事は，退化性が本質的に反映しない事である。そこで マルコフ過程における"退化性"あるいは特異性の implicit な定式化，又それを十分反映した理論の構成が問題となろう。 このような事をも含んだ上で"マルコフ過程特に拡散過程の構造"を調べるという立場から問題提起をした

のが 池田－渡辺(信)による"拡散過程の局所構造" Sem. on Prob. Vol 35 である。このノートでは それらに関連した事柄として、特に 調和測度の分布について 2,3の知られた結果を紹介したい 筆者の能力不足上 深いつっこみ方ができなく、単に羅列に終ってしまっている事をおわびしておく。

なお 研究集会でのべた事と幾分ズレがあるが、それは渡辺信三氏による質問に関連する結果が後で分った（更な筆者がのべた事の一部は既に知られていた）事と、その後、阪大で拡散過程のセミナーで、筆者が研究集会で意図していた事に関連した結果を色々知る事ができたのでそれの一部をつけかえ、その代り グリーン函数に関連した部分をけずったためである。

以下，R^n 上のマルコフ過程 $X=(x_t, P_x)$ を考える。D を R^n の open set，$\tau_D = \inf(t \geq 0,\ x_t \in D^c)$ とし

$$H_D(x, dy) \equiv P_x(x_{\tau_D} \in dy) \qquad x \in D$$

とする。$H_D(x, dy)$ を D における調和測度という。

§1. 拡散過程の調和測度

前にのべたように 調和測度の分布の問題を，拡散過程の局所構造 ~~探究~~ の問題として意識的にとりあげたのは，池田－渡辺(信) Semi on Prob. Vol 35 である。ここでは 単に調和

測度の分布の判定について知られた結果を紹介しておく.

R^n 上の楕円型(退化した場合も含む) 2階の微分作用素

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} - c \qquad (c \geq 0)$$

及びそれを生成作用素とする拡散過程 $X = (x_t, P_x)$ を対象とする。(係数に適当な条件をおく事によって常に構成できる) D を R^n の有界領域とする。次の問題を考えよう.

イ). $\forall x \in D$, $H_D(x, B) = 0$ となる(最大の)集合 $B \subset \partial D$ を求めよ.

ロ). $x_0 \in D$ fix, $H_D(x_0, B) = 0$ 〃

ラフにいえば 上のイ), ロ) は次の形の最大値原理に対応する.

イ)' $\bar{D}$ で連続かつ D で $Au = 0$ となる u に対して

$$\sup_{x \in D} u(x) \leq \sup_{x \in \partial D - B} u(x)$$

となる(最大の)集合 $B \subset \partial D$ を求めよ.

ロ)' 同じ u に対して $u(x_0) \leq \sup_{x \in \partial D - B} u(x)$ 〃

イ)' の問題とは, 微分方程式論で Fichera に端をはっし, Oleinik etc そして最近の C. D. Hill (Indiana Univ. Math. J. Vol 20 no 3 1970) による精密化 で論じられた問題である。確率論の立場からは, Freidlin, Pinsky (Th. Prob. Appl. 1968). Stroock-Varadhan (to appear) により論じられた。ここでは

Pinsky によって得られた結果をのべよう。 $a_{ij}, b_i \in C^2(R^n)$
$c=0$, D は C^2 class の境界 ∂D をもつものとする。更に

$$^\exists \tilde{x} \in R^n - \bar{D},\ ^\exists \delta > 0,\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x-\tilde{x})_i(x-\tilde{x})_j \geqq \delta |x-\tilde{x}|^2$$

for $^\forall x \in D$ をみたすものとする。

(Pinsky) $\{\nu_i\}$; ∂D での外側向き normal vector

$$\Sigma_3 = \{x \in \partial D,\ \sum a_{ij}\nu_i\nu_j > 0\}$$

$$\Sigma_2 = \{x \in \partial D,\ \sum a_{ij}\nu_i\nu_j = 0,\ \sum_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j})\nu_i > 0\}$$

$$\Sigma_1 = \partial D - \Sigma_2 - \Sigma_3$$

とおけば 任意の $x \in D$ に対して

$$H_D(x, \Sigma_1^0) = 0 \quad (\text{但し}, \Sigma_1^0 \text{は} \Sigma_1 \text{の内点})$$

かつ
任意の $x_0 \in \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $^\forall x_0$ の近傍 N

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} H_D(x, N \cap \partial D) = 1$$

ロ) の type の問題については、まとまった事は殆んど知られていない。Stroock-Varadahn の path の台についての結果が有力な手掛りを与えていると思われるが、筆者には現在それをのべる事ができない。イ) 又はロ) の問題を係数の滑らかさを除いた場合に論じる事，又生成作用素がフツウの微分作用素にならない場合を論じる事一特に調和座標系との関連でギロンする事一は重要であるが それは拡散過程の構造がもっと

明確につかまえられる必要がある。ここで次の事を注意しておく。もし $n \geqq 3$ で強楕円型なら，係数の滑らかの仮定を連続性だけに限っても ∂D 内の任意の open set B に対して

$$(*) \qquad H_D(x, B) > 0$$

となる。~~この事は~~（但し，Dの境界 ∂D は滑らかとする）これは，拡散過程が今の場合強 Feller になることと，∂D の点が正則点である事から容易に分る。なお (*) は十分退化している係数が C^∞ の場合でもなりたつ事がある。それは

$$A = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 + Y \qquad X_k, Y \text{ vector field}$$

とあらわせ，$X_1, \cdots, X_r$ の張る Lie 環 $\mathcal{L}(X_1, \cdots, X_r)$ の rank が常に n の時の場合である。（Bony の結果を使えばよい）

§2. Jump のあるマルコフ過程の調和測度

Jump がある場合，調和測度の台は ∂D だけでなく，D^c であり，purely discontinuous の場合は $H_D(x, \partial D) = 0$ である。したがって，"場合分け" は拡散過程の場合より少し厄介になる。微分作用素の係数に対応するのが Lévy 測度である。Lévy 測度と調和測度についてのまとまった結果は N. Ikeda - S. Watanabe "京大紀要 1961 の次の結果である。マルコフ過程についてのある条件の下で

$$(\star) \quad H_D(x, E) = \int_D G_D(x, z)\, n(z, E)\, dz \quad , E \subset \bar{D}^c$$

但し. $G_D(x,z)$ は 対象とするマルコフ過程のDでの part process のグリーン函数であり，$n(z, dy)$ は Lévy 測度である。上の等式により，1) でのべたイ)の問題と類似の問題について情報を得る事ができる。ここでは，安定過程について くわしい結果をえられているので それを紹介したい。

$X = (x_t, P_x)$ を R^n 上の α-次安定過程 $(2>\alpha>0, \alpha \neq 1)$, その Lévy 測度 $n(dy) = r^{-n-\alpha} n'(d\theta)\, dr$, transition probability density $p(t, x)$. ($n \geq 2$ とする). 仮定として，"$n'(d\theta)$ は原点0中心の単位球面 S_n の diametral plane に台をもたない" をおく. その時.

S. J. Taylor (J. Math. Mech. Vol 16. No 11 (1967).)

i) $0<\alpha<1$ かつ C (= $n'(d\theta)$ の smallest compact support) がある hemisphere 内にあるなら，

$$K = \hat{C} \text{ の interior}$$

但し，$K = \{x \in R^n, \ p(t, x) > 0 \text{ for some } t > 0\}$

$\hat{C}$ = 0を頂点とし，Cの convex hull $\hat{C}$ とでつくられる cone

ii) その他の場合 $p(t, x) > 0$, $\forall t > 0$, $\forall x \in R^n$

S_n 上の Borel set B に対して，$\hat{B}$ を B と 0 (これを頂点とする) とで張られる cone とする。$\mathrm{Supp}_{S_n} H_Q(0, dy) = \{ H_Q(0, \hat{E}) = 0$ となる S_n 上の最大の open set E の S_n における補集合$\}$ で定義する。但し，Q は 0 中心の単位球．S. J. Taylor の結果より，

(☆☆) i) の場合，$\mathrm{Supp}_{S_n} H_Q(0, dy) \subset \tilde{C}$

が示せる。なお注意を要する事は，ii) の場合でも $\mathrm{Supp}_{S_n} H_Q(0,dy) = S_n$ とは限らない．それは，(☆) を用いて例をつくることができる。なお，上と類似の結果を変数係数の α-次安定過程の場合にも十分正則な条件の下で $n \geqq 3$ ならば示せる。最後に微分作用素の時，その symbol $a(x,\xi)$ が，$\forall x, \forall \xi \neq 0$ に対して $a(x,\xi) \neq 0$ （即ち Pseudo-diff op として elliptic ）ならば ~~$H_D(x, B) > 0$~~ $\mathrm{Supp}\, H_D(x, dy) = \partial D$ だが，生成作用素がたとえば α-次安定過程のそれである時，symbol は，$a(x,\xi) \neq 0$ が $n'(d\theta)$ が S_n の diametral plane に台をもたない時にになりたつ事ーそれなのに ~~D が ii) の case が~~ (☆☆) がとなる場合がある事を注意しておく。