数理解析研究所講究録
第 146 巻 1972 年 114-126

Polyharmonic 方程式の Green 関数について

大阪工専　四津谷 一三

§ 0. 序

nを自然数とするとき、与えられた領域Dに対し, n-harmonic (Polyharmonic) 方程式 $\Delta^n u = 0$ の Green 関数が求まれば、境界値問題: "方程式 $\Delta^n u = 0$ が与えられているとき、Dの境界C上で与えられた関数 f_α $(\alpha = 0, 1, \cdots, n-1)$ に対し, 法線をνとすれば, C上で

$$u = f_0 \ , \quad \frac{\partial^\alpha u}{\partial \nu^\alpha} = f_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n-1)$$

を満足しDで正則な解を見出す事" を解く事が出来る.

こゝでは, 有界領域の内点を極とする n-harmonic 方程式の Green 関数及び無限遠点を極とする Green 関数をも考えて, 境界が円及び球の場合にそれぞれ n-harmonic 方程式の Green 関数を求める. 又それの一つの応用についてふれてみたい.

§ 1. 平面領域の Polyharmonic Green 関数

此の節では次の記号を用いる事にする.

D は有限個の正則曲線を境界とする複素 z 平面上の有界な領域, C は D の境界, $\tilde{D}$ は D の外部領域, a は固定された D の内点, $z = x + iy$ は動点とする.

〔定義 1.1〕 次の二つの条件をみたす関数を a を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する D の Green 関数と云う.

（I） a の近傍では

$$|z-a|^{2(n-1)} \log \frac{1}{|z-a|} + h_n(z)$$

の形である. こゝに $h_n(z)$ は D で方程式 $\Delta^n u = 0$ を満足し, その $2n-1$ 次以下のすべての導関数は D + C で連続である.

（II） 境界 C 上では, 関数自身及びその $n-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる.

〔定義 1.2〕. 次の二つの条件を満足する関数を無限遠点を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する $\tilde{D}$ の Green 関数と云う.

（I） 無限遠点の近傍では

$$\log|z| + a|z|^{2(n-1)} + P_n(x, y) + \bar{h}_n(z)$$

の形である. こゝに $P_n(x, y)$ は x と y の $2n-3$ 次以下の

多項式，$\tilde{h}_m(z)$ は $\tilde{D}$ で方程式 $\Delta^m u=0$ を満足しその $2m-1$ 次以下のすべての導関数は $\tilde{D}+C$ で連続かつ無限遠点で正則である．

（II）　境界C上では，関数自身及びその $m-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる．

今，a を極とする m-harmonic Green 関数を $G_m(z,a)$ と書く事にすれば，Dが原点を中心とする半径Rの円板 $|z|<R$ であるとき，$G_m(z,a)$ は次の式で与えられる．

（1.1）　$G_m(z,a)$
$$=|z-a|^{2(m-1)}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}z}{R(z-a)}\right| +\sum_{k=1}^{m-1}\frac{|z-a|^{2(m-k-1)}}{2k\,R^{2k}}\left\{|R(z-a)|^2-|R^2-\bar{a}z|^2\right\}^k.$$

（証　明）　$\Delta u=0$ のとき $\Delta^m\left(|z-a|^{2(m-1)}u\right)=0$ となることから条件（I）を満足している事は明らかである．

$$x=\left|\frac{R^2-\bar{a}z}{R(z-a)}\right|^2$$

とおけば，境界 $|z|=R$ 上では $x=1$ であって

$$G_m(z,a)=\frac{1}{2}|z-a|^{2(m-1)}\left\{\log x+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}(1-x)^k\right\}$$

と書き直され，さらに

$$f(x)=\log x+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}(1-x)^k$$

とおけば，条件（II）を満足するためには

$$f(1) = f'(1) = \cdots = f^{(m-1)}(1) = 0$$

となる事を示せば十分であつて，これは計算により確かめる事が出来る．（証明終）

次に無限遠点を極とする n-harmonic Green 関数を $G_n(z,\infty)$ と表わす．Dが前例と同じ円板であるとき，無限遠点を極とする $\Delta^n u = 0$ に関する $\tilde{D}$ の Green 関数は次の式で与えられる．

$$(1.2) \quad G_n(z,\infty) = \log\frac{|z|}{R} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2kR^{2k}}\left(R^2 - |z|^2\right)^k.$$

証明は（1.1）の場合と同じように出来る．

§2. n-harmonic inner 及び outer radii

前節の結果の一つの応用を述べよう．

記号 D，C，$\tilde{D}$，a 及び z は前節と同じとして，Dが単連結領域の場合、aを極とする方程式 $\Delta u = 0$ に関する D の Green 関数が

$$G_1(z,a) = \log\frac{1}{|z-a|} + h_1(z)$$

で与えられた時，関数 $w(z)$ が $w(a) = 0$，$|w'(a)| = 1$ で，Dを半径 r_a の円板に等角に寫像するものとすれば，

$$r_a = e^{h_1(a)}$$

で与えられる．r_a を D の a に関する inner radius と云う．任意の自然数 n に対しても，n-harmonic Green 関数を用いて D の半径群を次のように定義する．

〔定義 2.1〕 D の a を極とする方程式 $\Delta^n u=0$ に関する Green 関数が

$$|z-a|^{2(n-1)}\log\frac{1}{|z-a|}+h_n(z)$$

で与えられるとき，

$$\log r_{a,1}=h_1(a) \quad ,$$

(2.1)

$$\frac{r_{a,n}^{2(n-1)}}{2(n-1)}=|h_n(a)| \qquad (n\geqq 2)$$

とおいて，正なる量 $r_{a,n}$ を D の a に関する n-harmonic inner radius と呼ぶ．

$n=1,2$ の場合は後述の $\widetilde{D}$ の場合に於ても G. Polya と G. Szegö [4] が定義したものである．

特に D が半径 R の円板の場合には，n に無関係に，

$$r_{a,n}=\frac{R^2-|a|^2}{R}$$

で与えられる．

次に$\tilde{D}$について考えよう．

〔定義 2.2〕 $\tilde{D}$の無限遠点を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する Green 関数が

$$\log|z| + a|z|^{2(n-1)} + P_n(x, y) + \bar{h}_n(z)$$

であるとき，

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\log \bar{r}_1 = -a \quad, \\ &\frac{1}{2(n-1)\bar{r}_n^{\,2(n-1)}} = |a| \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

とおいて，正なる量 $\bar{r}_n$ をDの n-harmonic outer radius と呼ぶ．

特にDが半径Rの円板ならば $\bar{r}_n$ はnに無関係にRに等しくなる．

Dが nearly circular domain 即ち，極座標 r，φ で表わして

(2.3) $\quad r < 1 + \rho(\varphi)$

であるとき，こゝに $\rho(\varphi)$ は単位円の無限小変化を表わす．$\rho(\varphi)$ の Fourier 級数を

(2.4) $\quad \rho(\varphi) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$

とする．こゝに係数a_k，b_kは一位無限小である．この領域が一様密度をもつものとすれば重心cは，2位以上の無限小

の項を無視すれば

(2.5) $\qquad c = 2(a_1 + i b_1)$

で与えられる.

nearly circular domain の n-harmonic Green 関数が前節の式 (1.1), (1.2) によって与えられる単位円板の Green 関数と無限小の差があるとして, それぞれ $\gamma_{c,n}$ と $\overline{\gamma}_n$ を2位無限小迄計算すれば次のようになる [2], [3].

(2.6) $$\gamma_{c,n} = 1 + a_0 + a_1^2 + b_1^2 - \sum_{k=2}^{\infty}\{2nk - (2n-3)\}(a_k^2 + b_k^2),$$

(2.7) $$\overline{\gamma}_n = 1 + a_0 + a_1^2 + b_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\{2nk - (2n-1)\}(a_k^2 + b_k^2).$$

§3. 三次元領域の Polyharmonic Green 関数

この節では次の記号を用いる事にする.

Bは有限個の正則曲面を境界とする有界な単連結領域, Sは B の境界, $\widetilde{B}$ を B の外部領域, P_0 は固定された B の内点, P を動点とし又 $\overline{P_0P} = r$ と表わす.

[定義 3.1] 次の二つ条件を満足する関数を P_0 を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する B の Green 関数と云う.

(I) 点 P_0 の近傍では

$$r^{2n-3} + h_n(P)$$

の形である．こゝに $h_n(P)$ はBで方程式 $\Delta^n u=0$ を満足しその $2n-1$ 次以下のすべての偏導関数は $B+S$ で連続である．

(II)　境界S上では，関数自身及びその $n-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる．

こゝに定義した P_0 を極とする n-harmonic Green 関数を $G_n(P, P_0)$ と表わす事にする．Sが原点Oを中心とする半径Rの球面であるとき，$P_0(\neq O)$ のSに関する反転によつて移る点を P_0' とし，$\overline{OP_0}=\rho$, $\overline{P_0'P}=r'$ と表わす事にすれば，$n=1$ の場合はよく知られている通り

$$(3.1)\quad G_1(P, P_0)=\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho r'}$$

であり，$n\geqq 2$ の時には $G_n(P,P_0)$ は次の式で与えられる．

$$(3.2)\quad G_n(P, P_0)$$

$$=-\frac{R}{2\rho r'}\left\{r^{2n-4}\left(r-\frac{\rho}{R}r'\right)^2-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^{k-1}k!}r^{2n-2k-2}\left(r^2-\frac{\rho^2}{R^2}r'^2\right)^k\right\}.$$

(証明)　Green 関数の条件 (I) を満足する事は明らかである．今

$$G_n(P, P_0)=-\frac{R\,r^{2n-2}}{2\rho r'}\left[\left(1-\frac{\rho r'}{Rr}\right)^2-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2k-3)}{2^{k-1}k!}\left\{1-\left(\frac{\rho r'}{Rr}\right)^2\right\}^k\right]$$

と変形し，

$$x = \left(\frac{\rho r'}{Rr}\right)^2$$

とおけばS上では $x=1$ であつて

$$f(x) = 1 - 2x^{\frac{1}{2}} + x - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2k-3)}{2^{k-1}k!}(1-x)^k$$

とおけば，境界条件（II）を満足するためには

$$f(1) = f'(1) = \cdots\cdots = f^{(n-1)}(1) = 0$$

となれば十分であり，これは容易に確かめる事が出来る．

（証明終）

次に平面領域の場合と同称に無限遠点を極とするGreen関数を考えよう．

方程式 $\Delta u = 0$ に関しては，$\widetilde{B}$ の無限遠点を極とするGreen関数は

$$(3.4) \qquad \frac{1}{C}\{1 - U(P)\}$$

で与えられている〔1〕，ここにCはBの容量，$U(P)$ は $\widetilde{B}$ の導体ポテンシャルである．これをもとに二次元の場合に模して次のように定義する．

〔定義 3.2〕 次の二つの条件を満たす関数を無限遠点を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する $\widetilde{B}$ のGreen関数と云う．

（I） 無限遠点の近傍で

$$\frac{1}{C} + a r^{2(n-1)} + P_n(r, x, y, z) + \overline{h}_n(P)$$

の形である．こゝにCはBの容量，$P_n(r, x, y, z)$ は $2n-3$ 次以下の多項式で $P_n(0,0,0,0)=0$ となり $\overline{h}_n(P)$ は $\widetilde{B}$ で方程式 $\Delta^n u=0$ を満足し $2n-1$ 次以下のすべての導関数は $\widetilde{B}+S$ で連続かつ無限遠点で正則である．

（II） 境界S上では関数自身及びその $n-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる．

こゝに定義した無限遠点を極とする n-harmonic Green 関数を $G_n(P,\infty)$ と表わす事にする．Sが原点Oを中心とする半径Rの球面であるとき，$\overline{OP}=\lambda$ と書けば

$$(3.5)\quad G_n(P,\infty)=\frac{1}{R}-\frac{1}{\lambda}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k k!\, R}\left(1-\frac{\lambda^2}{R^2}\right)^k$$

で与えられ証明は容易である．

§4． 三次元領域の n-harmonic inner radii

〔定義 4.1〕 Bの P_0 を極とする方程式 $\Delta^n u=0$ に関する Green 関数が

$$r^{2n-3}+h_n(P)$$

で与えられるとき，

$$\frac{1}{r_{P_0,1}} = -h_1(P_0) \, ,$$

(4.1)

$$r_{P_0,n}^{2n-3} = \left| \frac{2^{n-1}(n-1)!}{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-5)} \right| h_n(P_0) \qquad (n \geqq 2)$$

とおいて $r_{P_0,n}$ を B の P_0 に関する *n-harmonic inner radius* と呼ぶ.

特に, B が原点 O を中心とする半径 R の球で $\overline{OP_0} = \rho$ とすれば, 前節の式 (3.1) 及び (3.2) により定義に従って計算すれば, n に無関係に

$$(4.2) \qquad r_{P_0,n} = \frac{R^2 - \rho^2}{R}$$

となる.

S が *nearly spherical surface* 即ち極座標 λ, θ, φ で表わして

$$(4.3) \qquad \lambda = 1 + \rho(\theta, \varphi)$$

とする. こゝに $\rho(\theta,\varphi)$ は単位球の無限小変化を表わす.

$\rho(\theta,\varphi)$ を次のように展開する,

$$(4.4) \qquad \rho(\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\theta,\varphi) \, ,$$

こゝに $X_k(\theta,\varphi)$ はそれぞれ一位無限小の係数をもつ k 次の球面調和関数である.

$$X_1(\theta,\varphi) = (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\sin\theta + c\cos\theta$$

であるとき、この領域が一様密度をもつと仮定してその重心をCとすれば，Cの座標を二位以上の無限小を無視して計算すれば (a, b, c) となる．平面の場合と同様に，重心Cに関する *n-harmonic inner radius* を二位無限小迄計算すれば

$$(4.5)\quad r_{c,n} = 1 + X_0 + \frac{1}{4\pi}\iint [X_1(\theta,\varphi)]^2 dS - \frac{1}{4\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\{nk-(n-2)\}\iint [X_k(\theta,\varphi)]^2 dS$$

となる [5]，こゝに積分は S 上で行う．

参考文献

[1] 久保忠雄：無限遠点を極とする三次元グリーン函数．徳島大工紀，I. 1－10 (1948)．

[2] S. Ogawa, T. Kayano and I. Yotsuya: Some Radii Associated with Polyharmonic Equations. Proc. Japan Acad., 47 (1), 44－49 (1971).

[3] S. Ogawa and I. Yotsuya: Some Radii Associated with Polyharmonic Equations. Proc. Japan Acad., 47 (4) 368－373 (1971).

[4] G. Pólya and G. Szegö: Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton Univ. (1951).

[5] I. Yotsuya : Some Radii of a Solid Associated with Polyharmonic Equations. (to appear).