数理解析研究所講究録
第148巻 1972年 8-19

Sheaf理論の位相空間への応用について

東京教育大 理　児玉 之宏

§1. 序

Sheaf理論が代数幾何，代数的位相幾何，関数論等に巾広い応用面を持つことはよく知られている。この小論ではSheafが位相空間論にも興味ある応用面を持つことを2方面について述べてみる。その1つはコンパクト化に関することであり，他は次元論に対することである。この方向では多くの興味ある部分が未開発に残っており，この論で述べることは氷山の一角にすぎない。Sheafについての定義，記号等はGodement [2]，Grothendieck [3] による。この論ではSheafによってつねに加群のsheafを意味し，写像はすべて連続であるとする。

§2.

Xを位相空間，$\mathcal{A}$をX上のsheafとする。$A \subset X$について$\mathcal{A}|A$は$\mathcal{A}$をAに制限したA上のsheafである。また$\mathcal{A}(A)$は

A 上での $\mathcal{A}$ への section の作る加群を意味する。 $x \in X$ について $\mathcal{A}_x$ あるいは $(\mathcal{A})_x$ は 点 x 上の $\mathcal{A}$ の stalk である。 X 上の sheaf の complex $\mathcal{A}^* = \{\mathcal{A}^i : i=0,1,\cdots\}$: $\mathcal{A}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \to \mathcal{A}^i \to \cdots$, $\delta^2 = 0$, と X の部分集合 A について, $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*|A)$ は A 上の i 次 cohomology sheaf を意味し, $H^i(\mathcal{A}^*|A)$ は上の sheaf の complex から得られる加群の cochain complex : $\mathcal{A}^0(A) \to \mathcal{A}^1(A) \to \cdots \to \mathcal{A}^i(A) \to \cdots$, の i 次 cohomology 群を表わす。また $\mathcal{A}$ を係数とする X の i 次 sheaf cohomology 群は $H^i(X;\mathcal{A})$ で表わされる。

(2.1) $\mathcal{G}$ を各 stalk が加群 G である constant sheaf であり X がパラコンパクト空間ならば, $H^i(X;\mathcal{G})$ は G を係数とする X の Čech cohomology group に等しい。(Gaodement [2])

(2.2) $\mathcal{A}$ が X 上の injective sheaf で, A が X の閉集合ならば, $\mathcal{A}|A$ は A 上の soft sheaf である (Grothendieck [3])。

$f : X \to Y$ を写像, $\mathcal{A}$ を X 上の sheaf, $f(\mathcal{A})$ で $\mathcal{A}$ の f による direct image を表わす。

(2.3) $\mathcal{A}$ が injective であれば, $f(\mathcal{A})$ は injective である。

$f : X \to Y$ をパラコンパクト T_2 空間 X から Y への閉写像とする。B を Y の閉集合, $A = f^{-1}(B)$ とおく。つぎの事実は Godement [2], Grothendieck [3], [4] に与えられている。

(2.4) $f(\mathcal{A})|B = f(\mathcal{A}|A)$ (sheaf の category での functor として).

(2.5) $i_f : f(\mathcal{A})(B) \cong \mathcal{A}(A)$.

(2.6) (2.5) より $\mathcal{A}^*$ を X 上の sheaf の complex とすれば，同型対応 $j_f : H^i(f(\mathcal{A}^*)|B) \cong H^i(\mathcal{A}^*|A)$, $i=0,1,2,\cdots$, が成立する。特に B が1点 y から成るとき，$(\mathcal{H}^i(f(\mathcal{A}^*)))_y \cong H^i(\mathcal{A}^*|f^{-1}(y))$.

(2.7) $\mathcal{A}$ を X 上の sheaf, $\mathcal{L}$ を Y 上の sheaf, $h : \mathcal{L} \to f(\mathcal{A})$ を準同形とする。$\mathcal{I}^*$, $\mathcal{J}^*$ をそれぞれ $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ の injective resolution とすれば，$f(\mathcal{I}^*)$ は Y 上の injective sheaf から成る complex であるから ((2.3))，準同形 $h^i : \mathcal{J}^i \to f(\mathcal{I}^i)$ が存在して，つぎの可換図形が得られる：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & \mathcal{L} & \to & \mathcal{J}^0 & \to & \mathcal{J}^1 & \to & \cdots & \to & \mathcal{J}^i & \to \cdots \\
 & & \downarrow h & & \downarrow h^0 & & \downarrow h^1 & & & & \downarrow h^i & \\
0 & \to & f(\mathcal{A}) & \to & f(\mathcal{I}^0) & \to & f(\mathcal{I}^1) & \to & \cdots & \to & f(\mathcal{I}^i) & \to \cdots
\end{array}
$$

h^i は chain homotopy を除いて unique に定まる。これから Y の閉集合 B, $A = f^{-1}(B)$ について準同形 $h^* : \mathcal{H}^i(\mathcal{J}^*|B) \to \mathcal{H}^i(f(\mathcal{I}^*|A))$, $h^* : H^i(\mathcal{J}^*|B) \to H^i(f(\mathcal{I}^*|A))$ が得られる。このとき (2.2) より $\mathcal{J}^*|B$ は $\mathcal{L}|B$ の soft resolution であるから，$H^i(\mathcal{J}^*|B) = H^i(B : \mathcal{L}|B)$. また (2.5) より $H^i(f(\mathcal{I}^*|A)) \overset{j_f}{\cong} H^i(\mathcal{I}^*|A) = H^i(A : \mathcal{A}|A)$ であるから，準同形 $r(h,f) : H^i(B : \mathcal{L}|B) \to H^i(A : \mathcal{A}|A)$ が得られる。

(2.8) direct image functor は left exact であるから (2.6), (2.7) より $r(1,f) : H^0(B : f(\mathcal{A})|B) \cong H^0(A : \mathcal{A}|A)$.

(2.9) Z を整数の加群とし Z_X により各 stalk が Z である X

上の constant sheaf とする。direct image の定義より monomorphism $h: Z_Y \to f(Z_X)$ が存在する。(2.7) と (2.8) から $\tau(1,f): H^0(Y:f(Z_X)) \cong H^0(X:Z_X)$, また $\tau(h,f)$ は合成写像 $\tau(1,f)h^*: H^i(Y:Z_Y) \to H^i(X:Z_X)$ であり，これは f によって誘導された integral Čech cohomology 群の間の準同形に等しい。

次の様な問題が K. Kuratowski によって与えられた。

(2.10) U と V をユークリッド n 空間 R^n の有界連結開集合とする。もし U と V が同相ならば，R^n-U と R^n-V の連結成分からなる集合の濃度は等しいか？

この問は，M.K. Fort. Jr [1] によって何ら代数的手段を使わずに肯定的に解かれた。E.G. Sklyarenko は sheaf を使用して上記の解を含む美事な定理を与えている。

定義1. 完全正則空間 X のコンパクト化 αX は，$\alpha X - X$ の各コンパクト連結部分集合が1点から成るとき，<u>punctiform コンパクト化</u>といわれる。

定義2. コンパクト化 αX が<u>完全</u>であるとは，X の任意の開集合 U について $O(U) = \alpha X - \overline{X-U}^{\alpha X}$ とおくと，$Bd_{\alpha X} O(U) = \overline{Bd_X U}^{\alpha X}$ が成立つことである。ここで $\overline{\quad}^{\alpha X}$ は αX での閉包を，$Bd_{\alpha X}$ は αX での境界を意味する。

(2.11) αX が完全コンパクト化である必要十分条件は，射影

$\pi : \beta X \to \alpha X$ が monotone なることである。ここで βX は X の Stone-Čech コンパクト化である。

(2.12) X が minimal な完全コンパクト化 μX を持つための必要十分条件は、X が少くとも1つの punctiform コンパクト化を持つことである。このとき μX は maximal な punctiform コンパクト化となる。

(2.11) と (2.12) は E.G. Sklyarenko [10] による。

定理1 (Sklyarenko[12]) X, Y を同相な連結完全正則空間とし、$\alpha X, \gamma Y$ をその punctiform なコンパクト化とする。$\pi : \beta X \to \alpha X$, $\nu : \beta Y \to \gamma Y$ を射影とする。もし π, ν が1次元の integral Čech cohomology 群の間の monomorphism を誘導するならば、任意の同相写像 $f : X \to Y$ は同相写像 $F : \alpha X \to \gamma Y$ に拡張される。

定理1 が Kuratowski の問題 (2.10) に解を与えることは、つぎの様に示される。明らかに $n > 1$ と考えてよい。S^n を n 次元球面とし、$S^n \supset U, V$ と考える。αU を S^n から $S^n - U$ の各連結成分を1点に縮めた空間とし、$h : S^n \to \alpha U$ を商写像とする。h は monotone であるから Vietoris-Begle の定理により、$h^* : H^1(\alpha U) \to H^1(S^n)$ は monomorphism である。(ここで $H^1(\alpha U)$ は integral Čech cohomology 群である。) これより $H^1(\alpha U) = 0$. 同様に γV を S^n から $S^n - V$ の各連結成分を1点に縮めた商空

間とすれば，$H^1(\gamma V)=0$。αU と γV は U と V の punctiform コンパクト化であるから，定理1により任意の同相写像 $f: U\to V$ は同相写像 $\bar{f}:\alpha U\to\gamma V$ に拡張される。これより集合 $\alpha U-U$ と $\gamma V-V$ の濃度は等しい，すなわち S^n-U と S^n-V の連結成分からなる集合の濃度は等しい。

（定理1の証明）(2.11) と (2.12) より π と ν が monotone であることをいえばよい。π が monotone であることを示す。$Z_{\beta X}$ の direct image を考える。各 $x\in\alpha X$ について stalk $(f(Z_{\beta X}))_x$ は (2.6) より $H^0(\pi^{-1}(x): Z_{\beta X}|\pi^{-1}(x))$ であるから，係数の群が Z と同形であることをいえばよい。これから $h: Z_{\alpha X}\to f(Z_{\beta X})$ を natural monomorphism としたとき h の同形をいえばよい。正現列：$0\to Z_{\alpha X}\xrightarrow{h}\pi(Z_{\beta X})\to\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X}\to 0$ は正現列：$0\to H^0(\alpha X: Z_{\alpha X})\xrightarrow{h_0^*}H^0(\alpha X:\pi(Z_{\beta X}))\longrightarrow H^0(\alpha X:\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})\to H^1(\alpha X: Z_{\alpha X})\xrightarrow{h_1^*}H^1(\alpha X:\pi(Z_{\beta X}))\longrightarrow H^1(\alpha X:\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})$ を誘導する。$\alpha X, \beta X$ は連結であるから，(2.9) より $\gamma(1,f)h_0^*: H^0(\alpha X: Z_{\alpha X})\to H^0(\beta X: Z_{\beta X})$ は同形であり h_0^* は同形となる。また $\gamma(1,f)h_1^*$ は仮定より monomorphism であるから，h_1^* は monomorphism となる。これから $H^0(\alpha X:\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})=0$ となる。この群は αX 上の $\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X}$ への section の加群に等しい。αX が punctiform コンパクト化であり，$x\in X$ について stalk $(\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X})_x=0$ であるから，$\pi(Z_{\beta X})/Z_{\alpha X}=0$ が得られる。これから h は

同型対応となる。

Skljarenko [11] は更に次の様な興味ある定理を証明した。

定理 2. αX, γX を X の puncti form コンパクト化とする。X の点を動かさない写像 $f:\alpha X \to \gamma X$ が存在して，$f^*: H^i(\gamma X) \to H^i(\alpha X)$ が $i=0$ で同型，$i=1$ で monomorphism ならば，f は同相写像である。

定理 3. X が puncti form コンパクト化をもてば，射影が同型対応 $H^0(\beta X) \cong H^0(\alpha X)$ を誘導する様な任意の puncti form コンパクト化 αX の weight はすべて等しい。

次元論において，sheaf 理論が重大な役割を演ずることは [5], [6], [7], [8], [9] 等でよく知られている。この方面で Zarelua [15] と Skordev [13], [14] は興味ある結果を得た。今後すべての空間はパラコンパクト T_2 であるとする。$\mathcal{A}$ を空間 X 上の sheaf, U を X の開集合とする。$\mathcal{A}_U$ を次の様な $\mathcal{A}$ の部分 sheaf とする；$(\mathcal{A}_U)_x = \mathcal{A}_x$, $x \in U$；$(\mathcal{A}_U)_x = 0$, $x \notin U$.

定義 2. $D(X;\mathcal{A}) = \max\{n :$ ある開集合 $U \subset X$ について $H^n(X:\mathcal{A}_U) \neq 0\}$.

(2.13) $\dim X = D(X:Z_X)$ ([9: Appendix] 参照).

(2.14) $D(X:\mathcal{A}) \leq n \Leftrightarrow \mathcal{A}$ の長さ $n+1$ の soft resolution: $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \cdots \to \mathcal{C}^n \to 0$ が存在する。

(2.15) $f: X \to Y$ が閉写像で $\dim f = 0$ ならば，$\gamma(1,f)$:

$H^i(Y:f(\mathcal{A}))\cong H^i(X:\mathcal{A})$, $i=0,1,\cdots$. また $D(Y:f(\mathcal{A}))\leq D(X:\mathcal{A})$。ここで $\dim f=\max\{\dim f^{-1}(y):y\in Y\}$.

A. Zarelua [15] は (2.14) を更に精しく分析するために、次の概念を導入した。

定義3. sheaf の system $\Sigma=\{U_\lambda,\mathcal{A}_\lambda,\gamma^\lambda_\mu\}$ は X 上の partial inductive system である：(1) $\{\lambda\}$ は directed set で $\{U_\lambda\}$ は X の開被覆である, (2) $\mathcal{A}_\lambda$ は U_λ 上の sheaf, (3) $\lambda\geq\mu$ ならば $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ で γ^μ_λ は準同型 $\mathcal{A}_\mu|U_\lambda\cap U_\mu\to\mathcal{A}_\lambda|U_\lambda\cap U_\mu$ であり, $\lambda_n\geq\lambda_{n-1}\geq\cdots\geq\lambda_1$ ならば $U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}\neq\phi$ で $\gamma^{\lambda_1}_{\lambda_n}=\gamma^{\lambda_{n-1}}_{\lambda_n}\cdots\gamma^{\lambda_1}_{\lambda_2}$ が成立つ, (4) $x\in U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$ ならば, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\leq\mu$ が存在して $x\in U_\mu\cap U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_n}$ となる。更に Σ が, (5) 各 γ^λ_μ が monomorphism で, $U_{\lambda_1}\cap U_{\lambda_2}\neq\phi$ となる λ_1,λ_2 について $\lambda_1,\lambda_2\leq\mu$, $U_\mu=U_{\lambda_1}\cap U_{\lambda_2}$ となる μ が存在する, を充すならば, Σ は正則といわれる。

partial inductive system $\Sigma=\{U_\lambda,\mathcal{A}_\lambda,\gamma^\lambda_\mu\}$ が与えられたとき, $x\in X$ について $\Lambda_x=\{\lambda:x\in U_\lambda\}$ とおけば, $\{(\mathcal{A}_\lambda)_x:\gamma^\lambda_\mu,\lambda\in\Lambda_x\}$ は加群の inductive system である。$\mathcal{A}_x=\varinjlim\{(\mathcal{A}_\lambda)_x\}$, $\mathcal{A}_\infty=\bigcup_{x\in X}\mathcal{A}_x$ とおく。presheaf から sheaf を作ると同様の手続によって, $\mathcal{A}_\infty$ に位相を導入すれば $\mathcal{A}_\infty$ は X 上の sheaf となる。$\mathcal{A}_\infty$ を Σ の limit とよぶ。

定義4. X の開集合 U 上の sheaf $\mathcal{A}$ について, X の $\mathcal{A}$ に関

する<u>相対次元</u> $r(X:\mathcal{A}) \leq n$ とは，Uに含まれるXの任意の閉集合Fについて $D(F:\mathcal{A}) \leq n$ となることである。

(2.16)　$\Sigma = \{\mathcal{A}_\lambda\}$ を X 上の sheaf の正則な partial inductive system とする。各 $\mathcal{A}_\lambda$ について $r(X:\mathcal{A}_\lambda) \leq n$ ならば，Σ の limit $\mathcal{A}$ に対して $D(X:\mathcal{A}) \leq n$ である。

$f: X \to Y$ を finite to one（各 $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ が高々有限個の点からなる）閉写像とする。$n \geq 0$ について $X_n = \cup\{f^{-1}(y):$ $f^{-1}(y)$ が少くとも n 個の点からなる$\}$ とおく。X の部分集合 M について，$rd_X M = \max\{\dim F : F$ は M に含まれる X の閉集合$\}$ とする。$M = \phi$ のとき $rd_X M = -\infty$ とおく。

(2.17)　$f: X \to Y$ が finite-to-one 閉写像ならば，次の様な sheaf の正規列 $\mathcal{G}^i$, $i=1,2,\cdots$, が存在する; $0 \to Z_Y \to f(Z_X) \to \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^2 \to \cdots$.

(2.16) と (2.17) より spectral sequence を計算することによって次の興味ある定理が得られる。

定理 4.　$f: X \to Y$ が finite to one 閉写像ならば $\dim Y \leq \max_{0 \leq n < \infty} \{rd_X X_{n+1} + n\}$. 特に各 $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ が高々 $n+1$ 個の点から成る場合は，$\dim Y \leq \dim X + n$ となる。

Zarelua [15] はまた，(2.17) を使用してホモロジー多様体に関して Chernavskii の結果を含む定理を証明している。

次の定理は Skordev [13], [14] によって与えられた。これ

らは Hurewicz の結果の精密な一般化である。

定理5. $f: X \to Y$ を $\dim f = 0$ となる閉写像とし, $\dim Y \geq \dim X + k$ ならば, $rd_Y Y_{s+1} \geq \dim Y - s$, $s = 0, 1, \dots, k$, が成立する。

定理6. $f: X \to Y$ を閉写像とし, $\dim Y \geq \dim X + k$ とする。$g \geq 0$ について $M_g = \{y \in Y : \dim f^{-1}(y) \geq g\}$ とおく。ある $l \geq 0$ について, $\max\limits_{g>0} (rd_Y M_g + g) \leq \dim Y - l$ が成立すれば, 任意の $s \leq \min(l-1, k)$ に対して $rd_Y Y_{s+1} \geq \dim Y - s$ であり, 更に $l \leq k$ ならば $rd_Y Y_{l+1} \geq \dim Y - l - \dim f$ が成立つ。

定理7. $f: X \to Y$ を閉写像とし, $\dim Y \geq \dim X + 1$ とする。このとき $rd_Y Y_2 \geq \dim Y - \dim f - 1$ が成立する。もし $rd_Y Y_2 = \dim Y - \dim f - 1$ が成立すれば, $rd_Y M_1 = rd_Y M_2 = \cdots = rd_Y M_{\dim f} = rd_Y Y_2$ となる。ここで M_g, $g = 1, \dots, \dim f$, は定理6の様に定義される。

問題1. Sklyarenko の定理は「適当な条件をもつ写像: $X \to Y$ が $\alpha X \to \gamma Y$ に拡張出来る」という形で一般化出来るか? 例えば, 与えられた写像 $f: X \to Y$ が perfect かつ monotone である場合はどうか?

問題2. 上記の次元に関する定理(4–7)に集合論的な証明が与えられるか?

次の問題の解決には，sheaf が非常に有効であるように思われる。（[6]，[7]，[9] 参照。）

問題 3. 次の様な整数 n は存在するか？ すべての完備な可分距離空間 X について，$\dim(X \times X) \geq 2\dim X - n$ が成立する。（X がコンパクト空間ならば $n = 1$ となる。）

問題 4. $\dim(X \times X) = 2\dim X$ となる可分距離空間は？

参考文献

[1] M. K. Fort, Jr., The complements of bounded, open, connected subsets of Euclidean space, Bull. Acad. Polonaise des Sciences, vol. 9 (1961), 457 − 460.

[2] R. Godement, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris (1958).

[3] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algebre homologie, Tohoku Math. J., 9(1957), 119−221.

[4] A. Grothendieck, Éléments de Géométrie Algébrique. III, Publ. Math. IHES, 11(1963).

[5] Y. Kodama, A remark on the cohomology group and the dimension of product spaces, J. of Math. Soc. Japan, 21(1969), 54−57

[6] Y. Kodama, On subset theorems and the dimension products, Amer. J. of Math., 91(1969), 486 − 498.

[7] V. I. Kuzminov, Test spaces with respect to cohomological dimension of paracompact spaces, Doklady Acad. Nauk SSSP, 181 (1968), 538-541.

[8] V. I. Kuzminov, Homological dimension theory, Uspehi Mat. Nauk, 23, 5(143)(1968), 3-49.

[9] K. Nagami, Dimension theory, Academic Press (1970).

[10] E.G. Sklyarenko, Some questions in the theory of bicompactifications, Izv. Akad. Nauk SSSP., 26(1962), 427-452.

[11] E. G. Sklyarenko, Bicompactifications with punctiform boundaries and cohomology groups, Izv. Akad. Nauk SSSP, 27 (1963), 1165-1180.

[12] E.G. Sklyarenko, Some applications of the theory of sheaves in general topology, Uspehi Mat. 19.6(120)(1964), 41-62.

[13] G.S. Skordev, On dimension raising mappings, Mat. Zam. 7.6 (1970), 697-705.

[14] G.S. Skordev, On resolutions of continuous mappings, Mat. Sb. 82(124)(1970), 532-550.

[15] A.V. Zarelua, Finite to one mappings of topological spaces and cohomology manifolds, Sibirisk Mat. J., 10(1969), 64-92.