数理解析研究所講究録
第148巻 1972年 37-46

位相的完備化についての二三の定理

静大 石井 正

§1. 序

以下特に断わらない限り空間はすべて完全正則ハウスドルフ空間とする．空間Xの最も強い uniformity に関する完備化を位相的完備化とよび，$\mu(X)$ で表わす．最近 Morita [9] は μ が covariant functor であることなど $\mu(X)$ について興味ある結果を証明し，特にXが M-space ([8]) の場合に次のことを示した．

定理 1.1 空間XがM-space のとき，次のことが成立する．

(a) $\mu(X)$ は paracompact M-space である．

(b) $\mu(X)$ が Lindelöf space であるためには，Xから可分距離空間Tへの quasi-perfect map が存在することが必要かつ十分である．

(c) $\mu(X)$ が locally compact であるためには，Xから

locally compact な距離空間への quasi-perfect map が存在することが必要かつ十分である.

(a)については Isiwata [5] が M'-space で成立することを示し, さらに Morita [9] はその逆も真であることを示した. (b), (c) についても M'-space で成り立つことが知られている.

さて上の定理にもとづいて, Morita [9] は次の問題を提起した. いかなる空間 X に対し, $\mu(X)$ が paracompact (resp. Lindelöf, locally compact) になるであろうか? この問題を解くため筆者は次の2つの方法を考えた.

(1) filter を用いる方法 (Corson [2] の Analogy).

(2) X の extendable open cover を用いる方法.

しかし (2) の方法で得られる結果の方が定理 1.1 との関係がつけ易いので, 主としてそれらについて述べる.

注意 最近 Howes [3] は空間 X のある uniformity に関する完備化 $u(X)$ が paracompact (resp. Lindelöf) になる条件を net を用いて求め, それを $\mu(X)$ に適用して一つの結果を得た. しかし (1) の方法にもとづく筆者の結果といくぶんちがう形なので, 筆者の得た結果を述べておく. 以下 $\mu(X)$ が paracompact (resp. Lindelöf etc) のとき, X を pseudo-paracompact (resp. pseudo-Lindelöf etc) とよ

ぶことにする.

定理A　空間Xについて次のことは同等である.

(a)　Xはpseudo-paracompactである.

(b)　$\mathfrak{F}$がXのfilterで, Xが連続的にその中に写像される任意の距離空間の中で$\mathfrak{F}$の像が觸点をもつならば, $\mathfrak{F}$はあるCauchy filter ($\mathfrak{u}$に関する)に含まれる.

定理B　空間Xについて次のことは同等である.

(a)　Xはpseudo-Lindelöfである.

(b)　$\mathfrak{F}$がXのfilterで, X上の任意の実数値連続函数による$\mathfrak{F}$の像がR $(=(-\infty,\infty))$において觸点をもつならば, $\mathfrak{F}$はあるCauchy filter ($\mathfrak{u}$に関する)に含まれる.

§2. Pseudo-paracompact spaces.

Xの開被覆$\mathfrak{U}=\{U_\alpha \mid \alpha\in\Omega\}$に対し, $\mathfrak{u}(X)$の開被覆$\tilde{\mathfrak{U}}=\{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha\in\Omega\}$で, $U_\alpha=\tilde{U}_\alpha\cap X$, $\alpha\in\Omega$となるものが存在するとき, $\mathfrak{U}$をXのextendable open coverとよぶ. Xの開被覆$\mathfrak{U}$がextendableであるためには, Xの任意のCauchy filter ($\mathfrak{u}$に関する) $\mathfrak{F}$に対し, $F\subset U$なる$F\in\mathfrak{F}$と$U\in\mathfrak{U}$が存在することが必要かつ十分であることが容易に示される.

定理2.1　空間Xについて次のことは同等である.

(a) X は pseudo-paracompact である．

(b) X の任意の extendable open cover は normal である．

上の結果は簡単なことであるが，これを用いて次の定理 2.2 〜 2.4 が証明される．

定理 2.2 空間 X にその任意の要素 $U \in \mathcal{U}$ が pseudo-paracompact であるような normal open cover $\mathcal{U}$ が存在すれば，X は pseudo-paracompact である．

次の定理は定理 1.1 (a) の一般化である．

定理 2.3 $f: X \to Y$ が X から paracompact q-space Y の上への Z-map で $f^{-1}(y)$ が pseudo-paracompact ならば，X は pseudo-paracompact である．

$f: X \to Y$ が Z-map とは f が X から Y の上への連続写像で，任意の zero-set $Z \subset X$ に対し $f(Z)$ が Y の閉集合になることである．閉写像はすべて Z-map である．q-space については [6] を参照されたい．定理 2.3 は次のより一般的な結果から導かれる．

定理 2.3′ $f: X \to Y$ が X から paracompact q-space Y の上への Z-map で，X の任意の extendable open cover $\mathcal{V}$ に対し $f^{-1}(y) \cap \mathcal{V}$ が $f^{-1}(y)$ の normal open cover ならば，X は pseudo-paracompact である．

定理 2.3′ の証明には次の 2 つの Lemma が必要である.

Lemma 2.4　$f: X \to Y$ が X から q-space Y の上への Z-map ならば, $\mathcal{B}f^{-1}(y)$ ($= f^{-1}(y)$ の境界) は relatively pseudo-compact (すなわち, X 上の任意の実数値連続函数は有界) である.

上の Lemma は本質的には Michael [6] による.

Lemma 2.5 (Dykes [3]) X が位相的完備ならば, X の任意の relatively pseudo-compact な集合 F は compact である.

定理 2.3 の系として, 次の結果が成り立つ.

系 2.6　$f: X \to Y$ が X から paracompact q-space Y の上への Z-map ならば, 次の各場合について X は pseudo-paracompact になる.

(i) $f^{-1}(y)$ は M-space (or M'-space) である.

(ii) $f^{-1}(y)$ は paracompact である.

(ii) の場合 X は必ずしも paracompact にはならないことが Morita, Hoshina によって教示された.

問題 (1) $f: X \to Y$ が pseudo-paracompact space X から Y の上への閉連続写像のとき, Y はまた pseudo-paracompact であるか?

(2) X が M^*-space ならば pseudo-paracompact

であるか？

§3. Pseudo-Lindelöf spaces and pseudo-locally-compact spaces.

Pseudo-Lindelöf spaces については，前節と同様に次の結果を得る．

定理 3.1　空間 X について次のことは同等である．

(a) X は pseudo-Lindelöf である．

(b) X は pseudo-paracompact で X の任意の normal open cover は countable subcover をもつ．

(c) X の任意の extendable open cover は countable subcover をもつ．

系 3.2　X が relatively pseudo-compact, closed set の可算和として表わされるならば，X は pseudo-Lindelöf である．

注意　系 3.2 の場合 $\mu(X)$ は σ-compact であることが Morita によって注意された．

定理 3.3　X にそのすべての要素が pseudo-Lindelöf であるような可算開被覆が存在するならば，X は pseudo-Lindelöf である．

定理 3.4　$f: X \to Y$ が X から Lindelöf space Y の

上への Z-map で $f^{-1}(y)$ が pseudo-Lindelöf ならば，X は pseudo-Lindelöf である．

定理3.4は次のより一般的な結果から導かれる．

定理3.4′ $f: X \to Y$ が X から Lindelöf space Y の上への Z-map で，X の任意の extendable open cover $\mathcal{V}$ に対し $f^{-1}(y) \cap \mathcal{V}$ が countable subcover をもてば X は pseudo-Lindelöf である．

系3.5 $f: X \to Y$ が X から Lindelöf space Y の上への Z-map で $f^{-1}(y)$ が relatively pseudo-compact, closed set の可算和ならば，X は pseudo-Lindelöf である．

定理3.6 空間X について次のことは同等である．

(a) X は pseudo-locally-compact かつ pseudo-paracompact である．

(b) X の開被覆の normal sequence $\{\mathcal{U}_n\}$ で，任意の $x \in X$ に対し $St(x, \mathcal{U}_{k(x)})$ が relatively pseudo-compact であるような $k(x)$ が存在する．

(c) X の normal open cover $\mathcal{U}$ で任意の $U \in \mathcal{U}$ が relatively pseudo-compact であるものが存在する．

(c) は Morita による．

41

§4. Some remarks on pseudo-normality

(I)　X が normal でも pseudo-normal になるとは限らない。

このことは Corson [1] の結果を用いて示される。

(II)　X の正則開集合による有限被覆がつねに normal であるような空間は functor μ で同じ category にうつる。

(III)　空間 X について (a) → (b) が成り立つ。

(a)　X は pseudo-normal である。

(b)　X の $\mu(X)$ へ拡張可能な有限開被覆は $\beta(X)$ へ拡張される。こゝで $\beta(X)$ は Stone-Čech の完閉化である。

(IV)　空間 X について次のことは同等である。

(a)　X は pseudo-paracompact である。

(b)　任意の compact space Y に対し，$X \times Y$ は pseudo-normal である。

(IV) は Tamano の定理 ([10]) の analogy である。

文　献

[1]　H. H. Corson, Normality of subsets of product spaces, Amer. J. Math., 81 (1959), 785-796.

[2] H. H. Corson, The determination of para-compactness by uniformities, Amer J. Math., 80 (1958), 185-190.

[3] N. Dykes, Mappings and realcompact spaces, Pacific J. Math., 31 (1969), 347-358.

[4] N. R. Howes, On completeness, Pacific J. Math., 38 (1971), 431-440.

[5] T. Isiwata, A generalization of M-spaces, I, II, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 359-363; 364-367.

[6] E. Michael, A note on closed maps and compact sets, Israel J. Math., 2 (1964), 173-176.

[7] K. Morita, Paracompactness and product spaces, Fund. Math., 50 (1962), 223-236.

[8] K. Morita, Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann., 154 (1964), 365-382.

[9] K. Morita, Topological completions and M-spaces, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 10 (1970), 49-66.

[10] H. Tamano, On paracompactness, Pacific J. Math., 10 (1960), 1043-1047.