数理解析研究所講究録
第150巻 1972年 71-76

統計的構造のcompactnessについて(II)

早大理工　草間時武

§1 序

(I)においてPitcherの統計的構造のcompactnessについての研究の結果が紹介されたが、本文においては山田作太郎氏と筆者が行った研究(Pitcherの結果を足がかりとした)の結果を述べる。これは近く論文(On compactness of the statistical structure and sufficiency)になる予定なので、またその証明は長いものもあるので、ここでは結果のみを述べることにする。

§2 準備

$(X\ \ S\ \ M)$ を統計的構造とする。すなわち X は集合, S はその上の σ-field, M は S 上の確率測度の族とする。$A\subset X$ に対して外測度 Γ_P^S, Γ_P^T を

$$\Gamma_P^S(A) = \inf_{A\subset B\in S} P(B)$$

$$\Gamma_p^T(A) = \inf_{A\subset B\in T} P(B)$$

で定義する。ただし T は $\mathcal{S}$ の sub-σ-field である。
K を σ-field とする。

$$\forall A\in\mathcal{S}\quad \exists B\in K:\ \Gamma_p^{\mathcal{S}}(A\triangle B)=0\quad (\forall P\in M)$$

$$\forall A\in K\quad \exists B\in\mathcal{S}:\ \Gamma_P^{\mathcal{S}}(A\triangle B)=0\quad (\forall P\in M)$$

がなりたつとき $\mathcal{S}\doteqdot K$ とかくことにする。
$\rho(x)=\bigcap_{x\in A\in\mathcal{S}} A$ とおく。$\rho(x)\in\mathcal{S}$ がすべての x についてなりたつとき $\mathcal{S}$ を A-type σ-field という。
$B_\alpha\in\mathcal{S}$ ($\alpha\in\Theta$, Θ は任意の濃度をもっていてよい) ならば $\bigcup_{\alpha\in\Theta} B_\alpha\in\mathcal{S}$ のとき $\mathcal{S}$ を complete σ-field という。$\mathcal{S}$ が complete なら A-type であることはあきらかである。
$\{\rho(x)\mid x\in X\}$ は X の partition となる。これを $\{A_\alpha\mid \alpha\in\Omega\}$ で表わす。
T を $\mathcal{S}$ の sub-σ-field とする。$\hat{T}(\mathcal{S})=\{B\mid \forall P\in M\ \exists A_P\in T:\ \Gamma_P^{\mathcal{S}}(A_P\triangle B)=0\}$ とする。$\hat{T}(\mathcal{S})$ は σ-field である。

§3 (X, $\mathcal{S}$, M) が compact であるための条件

定理 1. $\mathcal{S}$ を A-type, M は discrete な確率測度の族とする。またすべての A_α に対し $P(A_\alpha)>0$ となる

$P \in M$ が存在するとする。このとき次の(1)〜(3)は同値である。

(1) (X, S, M) は compact

(2) $S = \hat{S}(S)$

(3) S は complete

定理2、一般連続体假説のもとでは S が A-type ならば

S が complete $\Longrightarrow$ $(X, S\ M)$ は compact

$P \in M$ は $P = P_1 + P_2$ (P_1 は discrete な測度, P_2 は $P_2(A_\alpha) = 0$ $(\forall \alpha)$ なる測度)と表わされる。
そうすると

定理[redacted]3、(X, S, M) が compact なら
$H = \bigcup \{ A_\alpha \mid \exists P \in M : P(A_\alpha) > 0 \}$ とすると
$\Gamma_{P_2}^{S}(H) = 0$ が すべての $P \in M$ でなりたつ。
たゞし S は A-type とする。

§4. Pitcher [redacted] の open problem.

Pitcher は次の open problem を述べている。

(1) (X, S, M_i) $(i = 1, 2)$ が compact なら

$(X, S, M_1 \cup M_2)$ は compact か？

(2) (X_i, S_i, M_i) $(i=1,2)$ が compact なら $(X_1 \times X_2,\ S_1 \times S_2,\ M_1 \times M_2)$ は compact か？

これについては答は共に no である。

(1)についての反例

平面上で $(C-A) \cup B$ （Cは原点から放射される cone, A, Bは高々可附番集合）の全体 S は σ-field であり、また A-type となる。 $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$とし、$a$に対して P_a を $P_a(\{a\})=1$ なる確率測度とする。 $M = \{P_a \mid a \in R\}$ また $E=(C-A) \cup B$ に対し、（Cは cone, A, Bは高々可附番集合）

$\{(x,y) \mid y=0, x>0\} \subset C$ のとき $\hat{P}(E)=1$

しからざるとき $\hat{P}(E)=0$

とすると $(X, S, \{\hat{P}\})$, (X, S, M) は共に compact だが $(X, S, M \cup \{\hat{P}\})$ は compact にならぬことは定理3 を用いて示される。

(2)についての反例.

$X_1 = X_2 = X$, $S_1 = S_2 = 2^X$ $M_1 = M_2 (= M)$ はXの discrete な確率測度の全体とする。 $|X| > 2^{\aleph_0}$ と仮

定する。($|X|$ は X の濃度)。　このとき $(X_i, \mathcal{S}_i, M_i)$ は compact だが(定理1)　$(X_1 \times X_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, M_1 \times M_2)$ は compact にならない。

§3 Sufficiency との関係

定理4.　$T_1 (\subset \mathcal{S})$ は $(X, \mathcal{S}, M)$ に関して pairwise sufficient とする。　$T_1 \subset T_2 \subset \mathcal{S}$, (X, T_2, M) は compact とする。　このとき T_2 は $(X, \mathcal{S}, M)$ に関して sufficient である。

系4.1　$(X, \mathcal{S}, M)$ は compact, $T_1 (\subset \mathcal{S})$ は sufficient, $T_1 \subset T_2 \subset \mathcal{S}$ ならば $\hat{T}_2(\mathcal{S})$ は sufficient.

定理5、　$(X, \mathcal{S}, M)$ は compact, $T \subset \mathcal{S}$, T は sufficient とする。　このとき (X, T, M) は compact である。

系5.1.　$(X, \mathcal{S}, M)$ は compact, $T_1 \subset T_2 \subset \mathcal{S}$, T_1 は pairwise sufficient とする。　このとき、

T_2 が sufficient $\Longleftrightarrow$ (X, T_2, M) が compact

定理6　$\hat{T}(S) \subset S$ とする。

Tが$(X, \mathcal{S}, \mathcal{M})$に関して sufficient ならば$\hat{T}(T)$, $\hat{T}(S)$ も sufficient である。

注　Basuは定理1の条件のもとに minimal sufficient σ-field の存在を示したが、これは定理1により compact となり Pitcher によって compact の場合は minimal sufficient σ-field の存在が云えるのである。

また Morimoto はやはり定理1の条件のもとにT_1が sufficient, $T_1 \subset T_2 \subset S$ のときT_2が sufficient となるのはT_2が complete のときであることを示している。これは定理1と系5.1から容易にみちびける。