数理解析研究所講究録
第151巻 1972年 68-75

Markov性をもつ多次元径数 Gaussian processesについて

信州大　理　井上和行

§1. 序

確率空間 (Ω, Σ, P) 上の Gaussian process X_t, $t \in T$, $EX_t \equiv 0$, $EX_tX_s \equiv R(t,s)$, が与えられた時 covariance $R(t,s)$ を再生核としてもつ reproducing kernel Hilbert space (r.k.h.s.) $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(T)$ がきまる。逆に再生核 $R(t,s)$ をもつ r.k.h.s. $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(T)$ に対して上のような Gaussian process X_t, $t \in T$ が分布の意味で一意的にきまる。ここでは T を d 次元 Euclidian space $\mathbb{R}^d$ の中の滑らかな $(d-1)$ 次元超曲面で囲まれた有界領域とし，Gaussian process X_t, $t \in T$ の Markov 性を R.tt [4] と同じ意味で $\mathcal{H}$ の閉部分空間のことばを用いて定義する。

まず $\{X_t, t \in D\}$ (D は開集合，$\subset T$) で張られる $L^2(\Omega, P)$ の閉部分空間を $H(D)$ とする時，写像

$$\Phi : H(T) \ni X \longrightarrow u(s) \equiv EXX_s \in \mathcal{H}(T) \equiv \mathcal{H}$$

は unitary 写像である。$\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\Phi[H(D)]$ を $\mathcal{H}(D)$ と

書く。 $\{D_-, \Gamma, D_+\}$ は滑らかな $(d-1)$ 次元超曲面で囲まれた開集合 D_- $(\subseteq T)$, その境界 Γ, および $D_+ = T \setminus (D_- \cup \Gamma)$ の組を表わすものとする。この時次のような $\mathcal{H}$ の閉部分空間を導入する。 $\mathcal{H}(D_-)$ (“過去”), $\mathcal{H}(D_+)$ (“未来”) に対して $\mathcal{H}(D_+)$ の $\mathcal{H}(D_-)$ への正射影を $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$ と書く。 $\mathcal{H}(\Gamma_\pm) = \bigcap_{O \text{は開集合}, O \supseteq \Gamma} \mathcal{H}(D_\pm \cap O)$ とし特に $\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+)$ の時, $\mathcal{H}(\Gamma) = \mathcal{H}(\Gamma_-)$ (“現在”) と書く。一般には, $\mathcal{H}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(D_-) \cap \mathcal{H}(D_+) \subseteq \mathcal{H}^{+/-}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(D_-)$ となる。

<u>Definition</u>.

Gaussian process X_t, $t \in T$ が “Markov 性” をもつ。

$\Longleftrightarrow$

任意の組 $\{D_-, \Gamma, D_+\}$ に対して次の 2 条件がなりたつ。

(1) $\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+) = \mathcal{H}(\Gamma)$

(2) $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma) = \mathcal{H}(\Gamma)$ ▮

以下 § 2. では 2p 階一様強楕円型偏微分作用素 A に付随して定義される Gaussian process が Markov 性をもつことを述べる。Pitt [4] はこの process の “p 重 Markov 性” および予測問題への応用について述べている。 § 3. で我々は作用素 A の Dirichlet 問題に関する議論をすることにより Pitt [4] とは別の方向から Markov 性を証明する。 この方法は Molchan [3] が奇数次元径数 Brown 運動の Markov 性を示すのに用いたものである。 §4. では Pitt [4] の結果に関連して若干の補足をする。

§2. 仮定と結果

各整数$N \geqq 0$に対して$C_0^\infty(T)$（Tに含まれるcompact supportをもつような無限回微分可能関数の全体）上の内積$(\cdot,\cdot)_N$を次式で与える。

$$(u,\ v)_N = \sum_{|\alpha|\leqq N} \int_T D^\alpha u(t)\overline{D^\alpha v(t)}\,dt,\quad \|u\|_N = (u,\ u)_N^{\frac{1}{2}}$$

ノルム$\|\cdot\|_N$に関する$C_0^\infty(T)$の$L^2(T)$の中での完備化を$H_0^N(T)$と書く。

<u>Assumptions.</u>

1. Aは次の条件をみたす$2p$階形式的自己共役一様強楕円型偏微分作用素，$p \geqq [\frac{d}{2}]+1$，とする。

(1) $$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqq p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(t) D^\beta u\right)$$

各α, β（$|\alpha|,|\beta|\leqq p$）に対して$a_{\alpha\beta}(t)$はT上の無限回微分可能な有界関数.

(2) $\exists\, C>0\ ;\quad (u,\ Au)_0 \geqq C\cdot\|u\|_p^2 \qquad \text{for } \forall\, u \in C_0^\infty(T)$

2. $C_0^\infty(T)$上のもう一つの内積$\langle\cdot,\cdot\rangle$を次式で与える。

$$\langle u,\ v\rangle = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqq p} \int_T a_{\alpha\beta}(t) D^\alpha u(t)\overline{D^\beta v(t)}\,dt,\quad \|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

ノルム$\|\cdot\|$に関する$C_0^\infty(T)$の完備化を$\mathcal{H}$と書く。 ∎

この時SobolevのLemmaとAronszajn[1]の理論を用いることにより容易に次のことが示される。:

(a) ノルム$\|\cdot\|$とノルム$\|\cdot\|_N$は同値であり従って集合として$\mathcal{H}$と$H_0^p(T)$は同一視できる。

(b) *Hilbert space* $\mathcal{H}$は再生核$R(t,s)$をもつ*r.k.h.s.*である。

(c) $\mathcal{H}$の元はT上のμ-*Lipschitz*連続関数。($0<\mu\leq 1$, $0<\mu<p-\frac{d}{2}$)
従って§1.のはじめに述べたように$\mathcal{H}$に対して*Gaussian process* X_t, $t\in T$が一義的にきまるが,特に*covariance* $R(t,s)$の*Lipschitz*連続性により連続な*sample paths*をもつように*modify*できる。
この報告では以下この*process* X_t, $t\in T$のみを考える事にする。

Theorem.

X_t, $t\in T$はMarkov性をもち,かつ $\mathcal{H}^{+}(\Gamma)\subsetneqq\mathcal{H}(D_-)$ ∎

§3. Theoremの証明

まずLemmaをいくつか用意する。

Lemma. 1.

任意に組$\{D_-, \Gamma, D_+\}$をとる。　この時,

$u\in H_0^p(T)$, かつ　$u(t)=0$. for $\forall t\in D_\pm$
$\Longrightarrow$
uの$D_\mp$への制限$u_{D_\mp}$に対して, $u_{D_\mp}\in H_0^p(D_\mp)$ ∎

〈証明〉

$\gamma_{\Gamma_\pm}$を$D_\pm$に対応する境界Γへのtrace作用素とする。(定義は溝畑[2]による。)　この時,任意の$u\in H_0^p(T)$に対して,

$$\gamma_{\Gamma_+}(D^\alpha u_{D_+})=\gamma_{\Gamma_-}(D^\alpha u_{D_-}) \qquad \text{for } \forall\alpha\ ;\ |\alpha|\leq p-1$$

実際, $\exists\{\varphi_n\}_{n\geq 1}\subseteq C_0^\infty(T)$;

$$\lim_{n\to\infty}\|D^\alpha\varphi_n-D^\alpha u\|_1=0 \qquad \text{for } \forall\alpha\ ;\ |\alpha|\leq p-1$$

従ってtrace作用素の定義から、各α $(|\alpha| \leq p-1)$に対して、

$$\gamma_{\Gamma_+}(D^\alpha u_{D_+}) = \gamma_{\Gamma_+}((D^\alpha u)_{D_+}) = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\, \gamma_{\Gamma_+}((D^\alpha \varphi_n)_{D_+})$$
$$= \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\, \gamma_{\Gamma_-}((D^\alpha \varphi_n)_{D_-}) = \gamma_{\Gamma_-}((D^\alpha u)_{D_-})$$
$$= \gamma_{\Gamma_-}(D^\alpha u_{D_-})$$

今、特にuが$D_\pm$上で恒等的に0に等しければ

$$\gamma_{\Gamma_\pm}(D^\alpha u_{D_\pm}) = 0 \qquad \text{for } \forall\alpha\,;\, |\alpha| \leq p-1$$

ゆえに、$\gamma_{\Gamma_\mp}(D^\alpha u_{D_\mp}) = 0 \qquad \text{for } \forall\alpha\,;\, |\alpha| \leq p-1$

また、$\gamma_{\partial T}(D^\alpha u) = 0 \qquad \text{for } \forall\alpha\,;\, |\alpha| \leq p-1$

結局、$u_{D_\mp} \in H_0^p(D_\mp)$ ∎

<u>Lemma 2.</u>

任意に組$\{D_-, \Gamma, D_+\}$をとる。この時、

$u \in \mathcal{H}(D_\pm)$

$\Longleftrightarrow$

$u \in H_0^p(T)$、かつ、

$Au(t) = 0, \qquad \text{for } \forall t \in D_\mp$ ∎

<証明>

まず、$u \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}(D_\pm) \equiv \mathcal{H}^\perp(D_\pm) \Leftrightarrow u(t) = \langle u, R(\cdot, t)\rangle,\ \forall t \in \overline{D_\pm}$

即ち、$\mathcal{H}^\perp(D_\pm) = \{u \in \mathcal{H}\,;\ u(t) = 0,\ \text{for } \forall t \in \overline{D_\pm}\}$に注意する。さて、任意の$u \in \mathcal{H}(D_\pm)$をとる。

$$\langle u, \varphi\rangle = 0, \qquad \text{for } \forall \varphi \in C_0^\infty(D_\mp) \subseteq \mathcal{H}^\perp(D_\pm)$$

部分積分により

$$\int_{D_\mp} u(t)\,\overline{A\varphi(t)}\,dt = 0, \qquad \text{for } \forall \varphi \in C_0^\infty(D_\mp)$$

一方Aは形式的自己共役だから、$D_\mp$上でuは$Au=0$のweak solutionである。 従って強楕円型作用素のregularity theoremにより、$u\in C^\infty(D_\mp)$ かつ $D_\mp$上でuは$Au=0$のclassical solution である。

逆に$u\in H_0^p(T)$、かつ、各$t\in D_\mp$に対して$Au(t)=0$とする。

この時$u\in\mathcal{H}$だから次のように直和分解できる。:

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad \left(u^{(1)}\in\mathcal{H}(D_\pm),\ u^{(2)}\in\mathcal{H}^\perp(D_\pm)\right)$$

任意の$\varphi\in C_0^\infty(D_\mp)\subseteq\mathcal{H}^\perp(D_\pm)$に対して

$$\langle u^{(2)},\varphi\rangle=\langle u,\varphi\rangle-\langle u^{(1)},\varphi\rangle=0$$

ゆえに前半と同様にして、$u^{(2)}$は$D_\mp$上で $Au^{(2)}=0$ のclassical solution である。 一方Lemma 1により、$u^{(2)}_{D_\mp}\in H_0^p(D_\mp)$.

ゆえにAに対する$D_\mp$におけるDirichlet問題の解の一意性から、$u^{(2)}_{D_\mp}(t)\equiv 0$. 結局 $u^{(2)}(t)\equiv 0$，従って、

$$u\equiv u^{(1)}\in\mathcal{H}(D_\pm) \qquad \blacksquare$$

<u>Lemma 3.</u>

任意に組$\{D_-,\Gamma,D_+\}$をとる。この時

$$\mathcal{H}(\Gamma_-)=\mathcal{H}(\Gamma_+)=\{u\in H_0^p(T)\ ;\ Au(t)=0 \ \text{for}\ \forall t\in D_-\cup D_+\}$$

〈証明〉

$$\mathcal{H}(\Gamma_\pm)=\bigcap_{O\supseteq\Gamma\,:\,O\text{は開集合}}\mathcal{H}(D_\pm\cap O)=\bigcap_{O\supseteq\Gamma\,:\,O\text{は滑らかな超曲面で囲まれた開集合}}\mathcal{H}(D_\pm\cap O)$$

とできる。 従ってLemma 2により、

$$\mathcal{H}(\Gamma_\pm)\subseteq\{u\in H_0^p(T)\ ;\ Au(t)=0\ \text{for}\ \forall t\in D_-\cup D_+\}\equiv S$$

$S \subseteq \mathcal{H}(D_+\cap O)\cap \mathcal{H}(D_-\cap O)$, for $\forall O$ 滑らかな超曲面で囲まれた開集合，$O\supseteq\Gamma$

これらをあわせて

$$\mathcal{H}(\Gamma_-)=\mathcal{H}(\Gamma_+)=S \qquad \blacksquare$$

さてTheoremの証明にとりかかろう。まず$\mathcal{H}(\Gamma_-)=\mathcal{H}(\Gamma_+)=\mathcal{H}(\Gamma)$はLemma 3で示された。次に，$\mathcal{H}(\Gamma)\subseteq\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$は明白だから$\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)\subseteq\mathcal{H}(\Gamma)$を示せばよい。任意の$u_+\in\mathcal{H}(D_+)$をとり次のように直和分解する。：

$$u_+ = u^{+/-} + u_0, \quad (u^{+/-}\in\mathcal{H}(D_-),\ u_0\in\mathcal{H}^{\perp}(D_-))$$

Lemma 2.から

$$Au^{+/-}(t)=0, \qquad \text{for } \forall t\in D_+$$

また，$u^{+/-}(t)=u_+(t)$, for $\forall t\in D_-$，およびLemma 2から

$$Au^{+/-}(t)=0, \qquad \text{for } \forall t\in D_-$$

従って，$Au^{+/-}(t)=0$, for $\forall t\in D_-\cup D_+$

ゆえにLemma 3から，$u^{+/-}\in\mathcal{H}(\Gamma)$, 結局$\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)\subseteq\mathcal{H}(\Gamma)$.

最後に$\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)\subsetneqq\mathcal{H}(D_-)$を示そう。$t_0\in D_-$を任意にとって固定する時，$R(\cdot,t_0)\in\mathcal{H}(D_-)$であるが，$R(\cdot,t_0)\notin\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$.

実際，任意の$\varphi\in C_0^\infty(T)$に対して

$$\langle\varphi, R(\cdot,t_0)\rangle=\varphi(t_0).,$$

即ち，$AR(\cdot,t_0)=\delta(t-t_0)$ となり$R(\cdot,t_0)\notin\mathcal{H}(\Gamma)\equiv\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$ $\blacksquare$

§4. 補 足

(a)我々はLemma 2を用いてMarkov性を証明したが，Pitt [4] はMarkov性（p重Markov性）の結果としてLemma 2の内容を導いている。

(b)我々の考察したGaussian process X_t, $t \in T$に対してLemma 2を用いて容易に，$\mathcal{H}(D_t) = \bigcap_{O\text{は開集合}\supset \overline{D_t}} \mathcal{H}(O)$ を示すことができる。従ってこの式の右辺で"過去"および"未来"を定義しても同じ結果を得る。

(c) Lemma 1における超曲面Γの滑らかさはC^2-クラスとすれば十分である。（溝畑[2]）

<u>参考文献</u>

[1] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels" Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), 337—404

[2] 溝畑 茂, 「偏微分方程式論」, 岩波書店

[3] G.M. Molchan, "On some problems concerning Brownian motion in Lévy's sense" Theory of Prob. and its Appli. 12 (1967) 682—690

[4] L.D. Pitt, "A Markov property for Gaussian processes with a multidimensional parameter" Arch. Rat. Mech. Analysis, 17 (1971), 367-391.