数理解析研究所講究録
第151巻 1972年 144-158

Doob; Elementary Gaussian Processes について.

神大 理　西尾 真喜子

§1. 序

Doob は表記論文で，定常正規マルコフ過程 (t. h. G. M.) の構造を与えると共に，N重マルコフの条件を spectral 測度によって与えている。これらの方向の研究は，Hida, Levinson Dym, Mc Kean, Okabe 等により，発展させられている事はこの講究録でも見られる通りである。Doob の論文の紹介は今更という感がしないでもないが，無限重マルコフに対する一つの手がかりを与える可能性もある様にも思われる。

$\mathcal{X} = \{X(t),\ t \in T\}$ を N次元定常正規過程 (t. h. G) で $EX(t) = 0$, $R_{ij}(t) = E(X_i(0)X_j(t))$ とする。

<u>定義</u>。$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を N次元 t. h. G とする。適当な non-singular matrix B で $X(t) = BY(t)$ $\forall t \in T$ となる時 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を equivalent という．$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$ と記す．(以下断わらないが "=" は a. a の意味).

定義。$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ を各々 d_1, d_2, d_1+d_2 次元の t. h. G とする。 $\mathfrak{Z} \sim \{(X_1(t), \cdots X_{d_1}(t), Y_1(t), \cdots Y_{d_2}(t)),\ t \in T\}$ の時 $\mathfrak{Z}$ は $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{Y}$ の direct product と云う。

定義。$\mathfrak{X}$ が degenerate t. h. G とは，適当な $(C_1, \cdots C_N) \neq 0$ で $\sum_{i=1}^{N} C_i X_i(t) = 0 \quad \forall t \in T$ となる。

定義。$\mathfrak{X}$ が deterministic とは $\{X_i(t),\ t \leq s,\ i=1 \cdots N\}$ から張られる closed linear manifold が s に無関係.

§2. $T = \{\cdots -1, 0, 1 \cdots\}$ i.e. discrete time parameter.

次の五つの type の elementary t. h. G を定義する。

M(0) type $\Leftrightarrow$ $X(n) = 0$, $n \in T$. (一次元)

M(1) type $\Leftrightarrow$ $X(n) = X(n-1)$, $n \in T$. (一次元)

M(-1) type $\Leftrightarrow$ $X(n) = -X(n-1)$, $n \in T$. (一次元)

M($e^{i\theta}$) type $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} X_1(n) = X_1(0)\cos n\theta - X_2(0)\sin n\theta \\ X_2(n) = X_1(0)\sin n\theta + X_2(0)\cos n\theta, \end{cases} \quad (\text{二次元})$$
$$n \in T,\ X_1(0) \perp X_2(0)$$

M-type $\Leftrightarrow$ $X(n) = \sum_{m=0}^{\infty} A^n \eta(n-m) \quad n \in T,$

(こゝに $\{\eta(n),\ n \in T\}$ は独立な t. h. G.
A は $N \times N$ 行列)

$\mathfrak{X}$をt.h.G.Mとすれば

$$E(X(n)/X(k),\ k\le n-1) = E(X(n)/X(n-1))$$

$$= A X(n-1) \qquad \forall n \in T$$

となる行列Aがある。これを$\mathfrak{X}$のtransition matrixと云う。従って$\eta(n) \equiv X(n) - AX(n-1)$は$\{X(k),\ k\le n-1\}$と独立となり，

(1) $$X(n) = \eta(n) + A\eta(n-1) + \cdots + A^{n-\nu-1}\eta(\nu+1) + A^{n-\nu}X(\nu).$$

(2) $$R(n) = E(X(0)\cdot A^n X(0)) = R(0)\,{}^tA^n.$$

即ち，$\mathfrak{X}$の法則は$R(0)$，Aにより定まる。

<u>Proposition 1</u>。$\mathfrak{X}$をt.h.G.M.とする

(i) $\mathfrak{X}$は$M(0)$とnon-degenerate t.h.G.M.とのdirect product.

(ii) $\mathfrak{X}$がnon-degenerate且deterministicであれば，$M(1)$，$M(-1)$，$M(e^{i\theta})$のdirect product

(iii) $\mathfrak{X}$がnon-degenerateであれば，non-degenerateなdeterministicなt.h.G.MとM-typeのdirect product.

∵ (i). $R(0)$ は symmetric non-negative definite な故，
適当な real orthogonal matrix B により

$$B R(0) {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & c_1 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & c_\ell \end{pmatrix}$$ となる。

$B X(n) \equiv Y(n)$ とすれば　$E\, Y(n) \cdot Y(n) = B R(0) {}^tB$.
従って，　$Y_1(n) = \cdots = Y_{N-\ell}(n) = 0$，　$(Y_{N-\ell+1}, \cdots Y_N)$ は
non-degenerate.

(ii)。必要ならば equivalent な t.h.G.M を取ることにより，
$R(0) = I$ としてよい。　deterministic より　$X(n) = AX(n-1)$
∴　$R(0) = A R(0) {}^tA$　　　即ち，A は orthogonal matrix.
更に必要ならば equivalent な t.h.G.M を取ることにより

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ & 0 & & & & & & \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

としてよい。　1 の成分は $M(1)$，-1 の成分には $M(-1)$，
$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ には $M(e^{i\theta})$ が対応する。

(iii)　　(1) より

$$E(X(n) / X(k),\ k \le \ell) = A^{n-\ell} X(\ell).$$

martingale の収束定理より，左辺は $\ell \to -\infty$ の時，収束す

3. $Z(n)$ とすれば、

$$Z(n) = \lim_{l \to -\infty} A^{n-l} X(l) = A^n \lim_{l \to -\infty} A^{-l} X(l) = A^n Z(0)$$

(3) $$X(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} A^{n-i} \eta(i) + Z(n).$$ (各項は独立)。

(注). (3)の分解で、M-type の部分と Z は共に同じ A を transition matrix にしているが、次の意味で絶対値が1よりも小さい固有値の部分と、1の部分とに、対応している。

(3)より、独立な Gaussian system $\{\zeta, \xi(n), n = 0, \pm 1, \cdots\}$, $E\,\zeta \circ \zeta = E\,\xi(n) \cdot \xi(n) = I$, と $N \times N$ 行列 S, T;

$$S = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad T = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$ により

(3′) $$X(n) = \sum_{m=0}^{\infty} A^m S \xi(n-m) + A^n T \xi$$

とかける。更に $A \cdot S = \tilde{A} \cdot S$, $AT = \hat{A} T$ 且 $|\tilde{A}$ の固有値$| < 1$, $|\hat{A}$ の固有値$| = 1$ となる $\tilde{A}$, $\hat{A}$ がある。更に (3′) は、S と T の形より direct product.

Prediction error $E(X(n) - AX(n-1))^2 = S^2$. となる。

<u>N重 Markov</u>。 $\{y(n), n = 0, \pm 1, \cdots\}$ を一次元 t.h.G. で $E\,y(n) = 0$, $E\,y^2(n) = v > 0$, とする。(i.e. $M(0)$ type でない)。

(4) $$E(y(n)/y(k),\ k\le n-1) = E(y(n)/y(n-N),\cdots y(n-1)) = \sum_{j=1}^{N} a_j\, y(n-j)$$

の時 $\{y(n)\}$ を N 重マルコフと云う。 N 重マルコフで $N-1$ 重マルコフでない時狭義 N 重マルコフとも云う。 D を差分 ie $Df(n) = f(n+1) - f(n)$ とする時 (4) は，適当な $b_0 \cdots b_{N-1}$ で，$y(n) - \left(\sum_{i=0}^{N-1} b_i D^i\right) y(n-N)$ が $\{y(k),\ k\le n-1\}$ と独立となる事である。 また狭義 N 重マルコフの時 $a_N \neq 0$ 且 $a_1, \cdots a_N$ は一意的に定まる。

$X_j(n) = y(n+j-1)$ ， $j = 1 \cdots N$ とおけば，$\mathfrak{X}$ は N 次元 t. h. G. M, 且 transition matrix A は次の様になる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ - & - & - & - & \\ a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 & \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{X}$ に Proposition 1 を適用すれば，$\mathfrak{X}$ の特殊性より，次の事が分る。 即ち，$\mathfrak{X}$ が deterministic part を持てば y が deterministic となり，$\mathfrak{X}$ が deterministic となる。 従って，

"$\mathfrak{X}$ は deterministic t. h. G. M か，M-type t. h. G. M である"。

この事は A の固有値の絶対値が，すべて 1 であるか，すべて 1 より小さい，かに対応する。

定義。 $\{Z(n),\ n\in T\}$ を $M(0)$ でない一次元 t.h.G. とする。Z を component とする t.h.G.M の最小の次元が N の時、Z を N次元マルコフの component process と云う。

狭義 N重マルコフは N次元マルコフの component process になる。

Prop. Z を N次元マルコフの component process とする。適当な $a_1, \dots, a_N$ $(a_N \neq 0)$ で、$Z(n+N) - a_1 Z(n+N-1) - \dots - a_N Z(n)$ を $\{Z(k),\ k \leq n\}$ と独立 $(\forall n \in T)$ にする事が出来る。しかも、$a_1, \dots, a_N$ は一意的に定まる。

(∵) $\mathcal{X}$ を N次元 t.h.G.M, $X_1(n) = Z(n)$ とする。A を $\mathcal{X}$ の transition matrix, $\alpha^N - a_1\alpha^{N-1} - \dots - a_N = 0$ を A の characteristic equation とする。(1)より

$$X(n+i) = \sum_{j=0}^{i-1} A^j \xi(n+i-j) + A^i X(n).$$

$A^N - a_1 A^{N-1} - \dots - a_N I = 0$ より、$X(n+N) - a_1 X(n+N-1) - \dots - a_N X(n)$ は $\{X(k),\ k \leq n\}$ と独立。第一成分を見れば Prop. の前半が出る。次元の最小性より $\mathcal{X}$ は $M(0)$ component を持ち得ないから、$a_N \neq 0$。 $b_1, \dots, b_N$ が条件をみたすとする。$(a_1 - b_1) Z(n+N-1) + \dots + (a_N - b_N) Z(n)$ は $\{Z(k),\ k \leq n\}$ と独立。 $j \equiv \min\{i\,;\ a_i \neq b_i\}$。 $Z(n+N-j) - c_1 Z(n+N-j-1) - \dots - c_{N-j} Z(n)$ は $\{Z(k),\ k \leq n\}$ と独立。

$$Y_1(n) = Z(n), \quad Y_2(n) = E(Z(n+1)/Z(k),\ k \le n), \ \cdots$$

$$Y_{N-j}(n) = E(Z(n+N-j-1)/Z(k),\ k \le n)$$

とおけば，Y は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ - & - & - & & \\ c_{N-j} & \cdots & & & c_1 \end{pmatrix}$ を transition matrix とする t.h.G.M。即ち，Z は $(N-j)$ 次元の component process となり矛盾。

狭義 N 重マルコフと，N 次元 component process の差は，(4) と Prop. を比較すると，今る様に，$y(n+N) - a_1 y(n+N-1) - \cdots - a_N y(n)$ が $\{y(k),\ k \le n+N-1\}$ と独立になるか，$\{y(k),\ k \le n\}$ と独立になるか，にある。この差異が，spectral measure G による次の criterion に反映する。$\left(E y(0) y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, dG(\lambda)\right)$。

Proposition 2。 y を N 次元マルコフの component process とする。この時

$$G(\mu) = \int_{-\pi}^{\mu} \frac{|b_0 e^{i(N-1)\lambda} + \cdots + b_{N-1}|^2}{|e^{iN\lambda} - a_1 e^{i(N-1)\lambda} - \cdots - a_N|^2}\, d\lambda + \hat{G}(\mu) \tag{5}$$

こゝに $a_1 \cdots a_N$ は Prop. により定まる常数。かつ，

(6) $|z^N - a_1 z^{N-1} - \cdots - a_N|^2 = |z-\alpha_1|^2 \cdots |z-\alpha_N|^2$ に対し，
$|\alpha_i| = 1,\ i = 1 \cdots l,\quad |\alpha_{l+p}| \ne 1 \quad (p > 0)$ とすれば

$\alpha_1, \cdots \alpha_\ell$ はすべて異る。更に $\{\hat{G}$ の jump points$\} = \{\lambda_1, \cdots \lambda_\ell\}$. ($\alpha_k = e^{i\lambda_k}$) で $\hat{G}$ は discrete measure。かつ $|b_0 z^{N-1} + \cdots + b_N|^2 = C|z-\alpha_1|^{p_1} \cdots |z-\alpha_\ell|^{p_\ell} |z-\beta_1| \cdots |z-\beta_j|$ とすれば $p_1, \cdots p_\ell \geq 1$, β_i は $\alpha_1 \cdots \alpha_N$ と異る。

y が N次元マルコフの component process の時 deterministic なその component になる必要十分条件は $G = \hat{G}(\lambda)$。
また y がM-type の component となる必要十分条件は, $\hat{G} = 0$。

一次元 t.h.G y の spectral measure G が (5), (6) で表わされるならば y は N次元マルコフの component となる。

y が deterministic な N重マルコフ(狭義)である必要十分条件は, spectral measure G が N points で jump する discrete measure。

y が M-type の N重マルコフである必要十分条件は,

$$G(\mu) = \int_{-\pi}^{\mu} \frac{1}{|e^{iN\lambda} - \cdots - a_N|^2} d\lambda$$

こゝで, $z^N - a_1 z^{N-1} \cdots - a_N = 0$ の任意の根 α は, $|\alpha| < 1$ となる。

§3。 $T = (-\infty, \infty)$。 i.e. continuous time parameter.

X を平均連続な t.h.G.M (平均 0) とする。§1 と同様 X は M(0) type と non-degenerate に分解出来るが, X を以下

non-degenerate とする。即ち $R(0)$ は symmetric, positive-definite。

$$E(X(t+s)/X(s)) = A(t)X(s) \qquad (t \geq 0)$$

となる transition matrix $A(t)$ は $R(t) = R(0)\,{}^{t}\!A(t)$.

$A(t+s) = A(t)A(s)$, t につき連続, $A(0) = I$. 従って,

$$A(t) = e^{tQ} \qquad \left(Q = \lim \frac{1}{t}(A(t) - I)\right)$$

故に, $\mathfrak{X}$ の法則は $R(0)$ と Q により定まる。

$M(1)$, $M(e^{i\theta})$ は §2 に於て n を連続變數 t に変えることにより, 定義される。M-type を次の様に定義する。$d\xi(t)$ を N 次元 Brownian random measure, S を symmetric non-negative definite $N \times N$ 行列。H を $N \times N$ 行列とする。

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-\tau)H} S\, d\xi(\tau), \quad \mathfrak{Y} \text{ を M-type と云う。}$$

(右辺の積分は, 例えば H の固有値の実部が, 負ならば存在).

<u>Proposition 1'</u>。

$\mathfrak{X}$ が non-degenerate 且 deterministic であれば, $M(1)$, $M(e^{i\theta})$ の direct product.

$\mathfrak{X}$ が non-degenerate であれば, non-degenerate 且 deterministic なものと, M-type との direct product。即ち

(7) $$X(t) \sim \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)Q} S \, d\xi(s) + e^{tQ} T \zeta$$

こゝに，$E\,\zeta\cdot\zeta = I$，$d\xi$ と ζ は独立，prediction error $E\left(X(s+t) - e^{tQ}X(s)\right)^2 \sim t S^2 \quad (t \to 0)$，$S = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$。

N重マルコフ．一次元 t.h.G $\{y(t), t \in T\}$ の path が C^{N-1}-class で

$$E\left(y(t) / y(\tau), \tau \le s\right) = E\left(y(t) / y(s), y'(s), \cdots y^{(N-1)}(s)\right)$$

の時，N重マルコフという。N-1重でない時，狭義N重マルコフという。

狭義N重マルコフ y に対し，

$$X_1(t) = y(t), \quad X_2(t) = y'(t), \quad \cdots \quad X_N(t) = y^{(N-1)}(t)$$

とすれば，X は non-degenerate な N次元 t.h.G M となり，(7) により，次の事が分る。

X の transition matrix $A(t) = e^{tQ}$，$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots \\ & \cdots & & \\ \alpha_N & & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix}$

error matrix $S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sqrt{c} \end{pmatrix} \quad (c \ge 0)$

$c = 0 \iff Q$ の characteristic equation は pure imaginary の simple root をもつ（$\{i\theta_j \;\; j = 1 \cdots N\}$ とする．）

$\Longleftrightarrow$ $y(t) = \sum_j \eta_j \cos t\theta_j + \xi_j \sin t\theta_j$, ここに $\{\eta_i\ \xi_i,\ i=1\cdots N\}$ は独立な Gaussian system,

$\Longleftrightarrow$ y の spectral measure は N-points で jump する様な discrete measure.

$c>0$ $\Longleftrightarrow$ Q の characteristic equation の root は real part が負,

$$\Longleftrightarrow \quad y(t) = c\int_{-\infty}^{t} [e^{(t-s)Q}]_{1N}\, d\xi_N(s)$$

即ち.

$$y^{(N)}(t) - \alpha_1 y^{(N-1)}(t) - \cdots - \alpha_N y(t) = c\,\xi_N'(t)$$

（N回微分により, white noise が出る）

$$\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{G}(\mu) = c^2\int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{|(i\lambda)^N - \alpha_1(i\lambda)^{N-1} \cdots - \alpha_N|^2}\, d\lambda \text{。}$$

§4。 Hilbert space valued t. h. G.

H を real separable Hilbert space, $(\ ,\ )$ を内積, $\mathbb{B}$ を H の subset の作る topological σ-algebra とする。確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ より, H への mapping X が, $X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ $({}^\forall A \in \mathbb{B})$ の時, X を H-valued random variable という。

この時, (X, y), $\|X\|$ は実数値確率変数となる。

$E\|X\|^2 < \infty$ の時, 平均 m と covariance functional S が, 次の様にして定義されます。 $\psi(y) \equiv E(X, y)$ は H 上の連続な linear functional となり, $\psi(y) = (m, y)$ となる m が一意的に定まる。 m を X の平均という。 $\varphi(x, y) \equiv E(X-m, x)(X-m, y)$ は, $H \times H$ 上の連続な bilinear functional となり, $\varphi(x, y) = (Sx, y)$ となる linear mapping $S ; H \longrightarrow H$ が定まるが, S は finite trace をもつ。 $\because$ $\{e_i\}$ を base とすれば,

$$\sum (Se_i, e_i) = \sum E(X-m, e_i)^2 = E\|X-m\|^2 < \infty .$$

X の characteristic functional が次の形をもつ時, 平均 m, covariance functional S の gaussian という。

$$E\, e^{i(X, y)} = e^{i(m, y) - \frac{1}{2}(Sy, y)} \qquad [2]$$

任意の $m (\in H)$ と trace operator S に対し, X が存在する事は, 有限次元の場合と同様である。 X が gaussian とは base $\{e_i\}$ に対し, $\{(X, e_i) \quad i = 1, 2 \cdots\}$ が 平均 (m, e_i) covariance $c_{ij} = (Se_i, e_j)$ の実 gaussian system となる事に外ならない。

$\mathcal{X} = \{X(n), \ n \in T\}$ が, 任意の linear operators A_n で $\sum_{\text{有限和}} A_n X(n)$ が gaussian になる時, gaussian system という

更に，$\sum_{n\text{有限}} A(n)X(n+l)$ の分布が $l(\in T)$ に無関係なとき，t. h. G. という。 $\mathfrak{X}$ が gaussian system とは $\{(X(n), e_i),\ i=1,2\cdots,\ n\in T\}$ が real gaussian system になることに外ならない。従って，$\{\xi, \mathfrak{X}\}$ が gaussian system であるとき，ξ と $\mathfrak{X}$ が独立となる，必要十分条件は，$\forall x, y\in H$ に対し，

$$E(\xi - E\xi, x)(X(n) - EX(n), y) = 0, \qquad \forall n\in T.$$

$\mathfrak{X}$ を t. h. G とする時，$E(X(n)/X(k),\ k\leq n-1) = AX(n-1)$, $\forall n\in T$ となる ~~linear~~ operator A がとれるとき，t. h. G. M. という。この時 $\|A\|\leq 1$，かつ，$\eta(n)\equiv X(n) - AX(n-1)$ は $\{X(k),\ k\leq n-1\}$ と独立になる。

$\{\eta(n),\ n\in T\}$ を独立の同じ分布の gaussian system $E\eta(n)=0$ とする。linear operator A に対し，

$$Y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} A^n \eta(n-m) \qquad (\text{右辺が収束した時})$$

と表される $\mathfrak{Y}$ を M-type という。

<u>Proposition 1″</u>。 $\mathfrak{X}$ を平均 0 の t. h. G. M とする。 $\mathfrak{X}$ は互に独立な M-Type t. h. G. M と deterministic t. h. G. M の和となる。

(∵) $\{\eta(n)\equiv X(n) - AX(n-1),\ n\in T\}$ は独立な同じ分布の gaussian system。 かつ，

$$(8)\qquad X(n) = \eta(n) + A\eta(n-1) + \cdots + A^{n-\nu-1}\eta(\nu+1) + A^{n-\nu}X(\nu).$$

$$(9)\qquad A^{n-\nu}X(\nu) = E\left(X(n)/X(k),\ k \leq \nu\right)$$

abstract martingale の収束定理より (9) は $\nu \to -\infty$ の時, 確率1で, 収束する。[3] 故に, (8) より

$$(10)\qquad X(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} A^{n-m}\eta(m) + Z(n).$$

かつ, $Z(n)$ は $\{\eta(k),\ k \in T\}$ と独立。 所が,

$$Z(n) = \lim_{\nu \to -\infty} A^{n-\nu}X(\nu) = A^n \lim_{\nu} A^{-\nu}X(\nu) = A^n Z(0).$$

即ち, (10) は求める分解になる。

文献

[1]. J. L. Doob, The Elementary Gaussian Processes, Ann Math. Stat. 15. (1944). 229– 282.

[2]. S. R. S Varadhan; Stochastic processes. (Chap 8 & 9) New York Univ. 1968

[3]. S. D. Chatterji ; Martingales of Banach-valued Random variables, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960). 395 – 398.