数理解析研究所講究録
第152巻 1972年 53-64

Link の concordant classification について

大阪市大 渋谷哲夫

序

R^3 or S^3 の knot の concordant (cobordic) classification は [1] で, link に関しては [2] でやられている。ここでは [1] と同じようなやり方で link に concordant classi-fication を導入しようとすると link の product がうまく定義できず, あまりうまくいかないという話である。

4-dimensional Euclidean space R^4 に embed された oriented surface F を考える。F の local knot type を次のようにきめる。$N(x, R^4)$, $N(x, F)$ をそれぞれ R^4, F の点 x における regular neighborhood とする。もし x が F の interior point ならば、boundary $\partial N(x, R^4)$ は 3-sphere で $\partial N(x, F)$ は 1-sphere である。そのとき $\partial N(x, F)$ を $k(x)$ と書き x におけるFの local knot という。$k(x)$ が trivial ならば F は

xで locally flat といい，もし$k(x)$が non-trivial のとき，Fはxで locally knotted あるいはxはFの locally knotted point という。FがR^4の subspace に properly に embed されているとき∂Fの点に関しても local knot は考えられるが，Fの slight modification によりxはFの interior point と考えることによりそこでの local knot ということになり∂Fでは locally flat と仮定してさしつかえない。Fの各点で locally flat のときFは locally flat といい，そうでないときFは locally knotted という。

Fox, Milnor は [1] で knot に equivalence relation をいれた。すなわち，knot kとk'が concordant, $k \sim k'$ とは $k \# (-k')$ が slice knot で定義する。kが slice knot とは $R^4 \supset R^3[0] = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid t = 0\} \supset k$ が $R^3[0, \infty) = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid t \geq 0\}$ で locally flat な disk をはるときをいう。さらにR^4に embed された2-sphere S^2の locally knotted points のすべてを$p_1, \cdots p_n$としたとき，S^2上で$p_1, \cdots p_n$を通る arc αをとるとき，$(\partial N(\alpha, S^2), \partial N(\alpha, R^4)) \approx (k(p_1) \# \cdots \# k(p_n), S^3)$が slice knot になる。また [1] の Theorem 3 により次のようにもいいかえられる。すなわち $k \sim k'$ なるための必要十分条件は $R^3[0, 1] = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid 0 \leq t \leq 1\}$ に locally flat な annulus が

存在して$R^3[0]$, $R^3[1]$でのboundaryがkと$-k'$になることである。これをlinkに拡張する。すなわちlとl'なるlinkがconcordant, $l \sim l'$とは(ここでlとl'のcomponentsの数が異なる場合も定義できるが、一応その数は同じとする。) $R^3[0,1]$に$\mu(l)$個のdisjoint locally flatなannuliが存在して$R^3[0]$, $R^3[1]$でのboundaryがlと$-l'$になるときをいう。さらにこの定義を少し弱めて、lとl'の間にlocally flatでなくともよいがdisjointなannuliがはれるときlとl'はweak concordantと呼び$l \underset{w}{\sim} l'$で表わす。そのとき次の2つのLemmaは明らかである。

<u>Lemma 1:</u> $\sim$, $\underset{w}{\sim}$はequivalence relationになる。

<u>Lemma 2:</u> 任意のknotはweak concordant to O (Oはtrivial knot). 特にslice knotならばconcordant to O.

<u>Theorem 1:</u> $l \underset{w}{\sim} l'$とする。そのとき対応する各componentがknot concordantならば$l \sim l'$.

proof: $F_1 \cup \cdots \cup F_n$を$R^3[0,1]$のmutually disjointなannuliで$(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[0] \approx l$, $(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1] \approx (-l')$なるものとする。各$F_i$がすでにlocally flatならばなにもする必要がないから少なくとも一つ、たとえばF_1がlocally flatでないとする。$F_1 \cap R^3[0] = k_1$, $F_1 \cap R^3[1] = (-k_1')$とすると条件より$k_1 \sim k_1'$. $R^3[-1]$, $R^3[2]$で点p, p'をそれぞれとり2つのcone $p * k_1$, $p' * (-k_1')$を

作る。すると $F_1 \cup p * k_1 \cup p' * (-k_1')$ は1つの 2-sphere S^2 で locally knotted points は $p, p', p_1, \cdots p_n$ である。ここで $p_1, \cdots p_n$ は F_1 の locally knotted points の全部とする。そこで S^2 上で p, p' を通り $p_1, \cdots p_n$ を通らない arc α をとる。すると $\partial(N(\alpha, R^4) \cap S^2) \approx k_1 \# (-k_1') \sim 0$。だから F_1 上で $p_1, \cdots p_n$ を通る arc β をとるとき $\partial(N(\beta, R^4) \cap S^2) \approx k(p_1) \# \cdots \# k(p_n) \sim 0$. だから $N(\beta, R^4)$ の中で $k(p_1) \# \cdots \# k(p_n)$ に locally flat な disk D をはり $\tilde{F}_1 = (F_1 - N(\beta; R^4) \cap F_1) \cup D$ とおくと $\tilde{F}_1$ は locally flat で $\partial \tilde{F}_1 = \partial F_1$。以下、同様に $F_2 \cup \cdots \cup F_n$ を locally flat にできる。故に $l \sim l'$. q.e.d.

l と l' が isotopic ならば $l \underset{w}{\sim} l'$ だから

<u>Corollary 1.1:</u> (D. Rolfsen [4]) l と l' が isotopic で対応する component が concordant ならば $l \sim l'$.

Lemma 2. と Theorem 1 より次の Corollary は明らか.

<u>Corollary 1.2:</u> $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ を link でその components が $k_1, \cdots k_n$ とする。$l \underset{w}{\sim} O_1 \circ \cdots \circ O_n$ ならば $l \sim k_1 \circ \cdots \circ k_n$. ここで $k \circ k'$ は split しているという意味である。

2つの knot k と k' の product は unique にきまるが、2つの link l と l' の product は l と l' の projection や、band の結び方などにより unique にはきまらない。ここでは n-fusion なるものを定義する。$l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$,

$l' = k_1' \cup \cdots \cup k_n'$ なるlinkとする。lとl'の異なるcomponentを1個ずつbandでむすぶ。lの$k_1, \cdots, k_n$と結ばれるl'のcomponentを$k_{i_1}', \cdots, k_{i_n}'$とするとき、できあがったlinkを$f_{i_1 \cdots i_n}(l \circ l')$と書き$l \circ l'$よりn-fusionでえられるという。

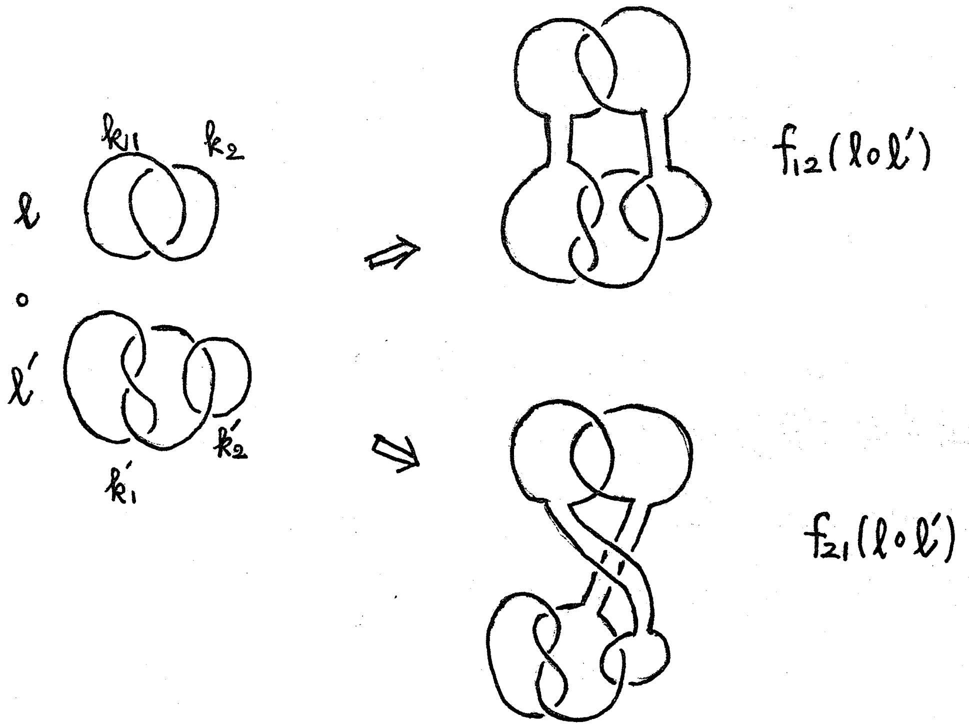


Fig 1

特に$k \circ k'$の1-fusionを$f(k \circ k')$と書く。さらにn-fusionは$n!$個の異なるcomponentのfusionがあるがそれらを区別しないとき$f^n(l \circ l')$と書く。

n-fusionはconcordanceの範囲でuniqueではない。たとえば、同じ$f_{12}(l \circ (-l))$でも~ 0になったり$\nsim 0$になったりする。(Fig 2).

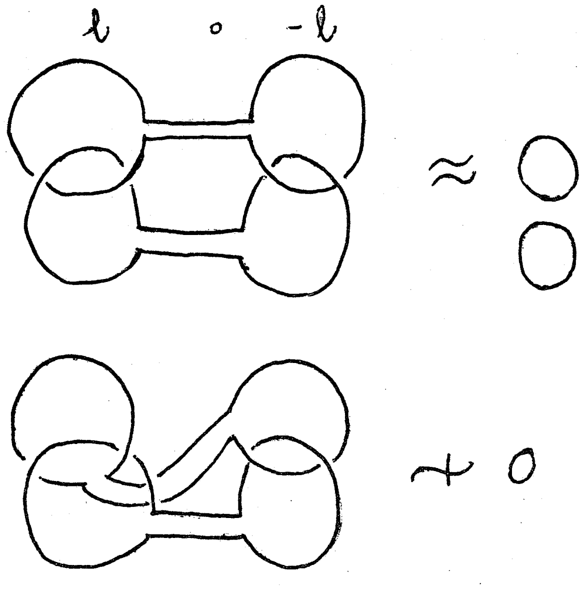


Fig 2

しかし $l \underset{W}{\sim} 0$ or $l' \underset{W}{\sim} 0$ であれば (weak) concordant の範囲である程度 unique にきまる。すなわち

<u>Lemma 3:</u> k と k' の any 1-fusion は product に concordant i.e. $f(k \circ k') \sim k \# k'$

proof: 2つの knot $f(k \circ k')$, $k \# k'$ をそれぞれ $R^3[0]$, $R^3[2]$ におき $R^3[0,2]$ でこれを boundary とする genus 1 の locally flat な surface で $R^3[1]$ との intersection が $k \circ k'$ になるような F をつくる。さらに十分小さな正数 ε に対して $F \cap R^3[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \approx F_1 \cup F_1'$ ここで $F_1 \approx k \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $F_1' \approx k_1' \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ と仮定してさしつかえない。$F' = cl(F - F_1)$ とおく。$R^3[1]$ での異なる2点 p, q をとり F_1 と交わらないような2つの cone $C(p) = p * (F_1 \cap R^3[1-\varepsilon])$, $c(q) = q * (F_1 \cap R^3[1+\varepsilon])$

を作ることができる。そこで $\tilde{F}=F'\cup C(p)\cup C(q)$ は $f(k\circ k')$ と $k\# k'$ を boundary とする locally knotted points p, q の annulus である。p と q を $\mathrm{Int}\,\tilde{F}$ での simple arc α でむすぶと $(\partial N(\alpha,\tilde{F}), \partial N(\alpha, R^3[0,2]))=(k\#(-k), \partial N(\alpha, R^3[0,2]))$.
だから $\partial N(\alpha,\tilde{F})$ は $\partial N(\alpha, R^3[0,2])$ で slice knot だから $N(\alpha, R^3[0,2])$ で locally flat な disk D がはれる。このとき $F^*=(\tilde{F}-N(\alpha,\tilde{F}))\cup D$ とおけば F^* は locally flat な annulus で $\partial F^*= f(k\circ k')\cup(-(k\# k'))$。故に $f(k\circ k')\sim k\# k'$　q.e.d.

このLemmaを使い次の２つのTheoremを証明する。

Theorem 2: $l=k_1\cup\cdots\cup k_n$, $l'=k'_1\cup\cdots\cup k'_n$ なるlinkとし, $l \underset{W}{\sim} 0$ and $l' \underset{W}{\sim} 0$ とする。すると l と l' の任意の n-fusion は weak concordant to zero i.e. $f^n(l\circ l')\underset{W}{\sim}0$ になる。
さらに各 i に対し $k_i\sim(-k'_i)$ ならば $f_{12\cdots n}(l\circ l')\sim 0$

proof: 前半は明らか。後半も $f_{12\cdots n}(l\circ l')\underset{W}{\sim}0$ で Theorem 1 (Corollary 1.2) と Lemma 3 を使うと証明できる。

Theorem3: $l\underset{W}{\sim}0$ と仮定すると次のことが成立する。

$$f_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')\sim g_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')$$

proof: $l_f=f_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')$, $l_g=g_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')$ と書き $l_f\subset R^3[0]$, $l_g\subset R^3[2]$ におく。$R^3[0,2]$ で n 個の locally flat な disjoint な surface $F_1\cup\cdots\cup F_n$ で各 F_i は genus 1 で, $\partial F_i\cap R^3[0]\neq\phi$, $\partial F_i\cap R^3[2]\neq\phi$, $\partial(F_1\cup\cdots\cup F_n)=l_f\cup(-l_g)$

$(F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[1]=l\circ l'$ なるものを作る。さらに十分小さな正数εに対して $(F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[1-\varepsilon,1+\varepsilon]\approx(l\circ l')\times[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ としてよい。$l\underset{w}{\sim}0$ だから $l\times R^3[1-\varepsilon]$, $l\times R^3[1+\varepsilon]$ は $R^3[1-\varepsilon,1)$, $R^3(1,1+\varepsilon]$ でそれぞれ $O_1\circ\cdots\circ O_n$, $O'_1\circ\cdots\circ O'_n$ と disjoint な annuli $\bigcup_{i=1}^{n}F'_i$ と $\bigcup_{i=1}^{n}F''_i$ がはれる。$O_1\circ\cdots\circ O_n$, $O'_1\circ\cdots\circ O'_n$ にそれぞれ disjoint disks $D_1\cup\cdots\cup D_n$, $D'_1\cup\cdots\cup D'_n$ をはる。そこで $\tilde{F}_i=(F_i-k_i\times[1-\varepsilon,1+\varepsilon])\cup F'_i\cup F''_i\cup O_i\cup O'_i$, $\tilde{F}=\tilde{F}_1\cup\cdots\cup\tilde{F}_n$ とおけば $\partial\tilde{F}=l_f\cup(-l_g)$。さらに Lemma 3 より l_f と l_g の対応する knot は互いに concordant で Theorem 1 を使い $l_f\sim l_g$. q.e.d.

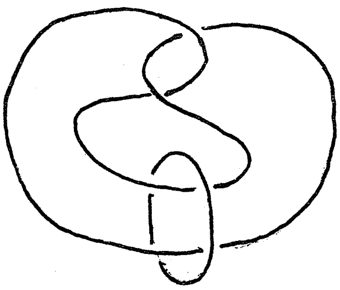
[2] で link に1つの equivalence relation ($\underset{c}{\sim}$ と書く)を導入したが、ここで $\sim$ は $\underset{c}{\sim}$ よりも強い relation であることを証す。すなわち、

<u>Theorem 4:</u> l が l' に concordant ならば l は l' に cobordic になる。すなわち $l\sim l'$ ならば $l\underset{c}{\sim}l'$。

proof: $l\sim l'$ より locally flat disjoint な annuli $F_1\cup\cdots\cup F_n$ が $R^3[0,1]$ にあり $(F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[0]=l$, $(F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[1]=-l'$ となっている。そこで isotopy で $F_1\cup\cdots\cup F_n$ をうごかして次のような状態におく。すなわち minimal points は $R^3[\frac{1}{8}]$ にあり $R^3[\frac{1}{4}]$ で l と trivial link との fusion の bands が同時に

おこる。$R^3[\frac{3}{4}]$で fission が同時におこり l'と trivial link にわかれ, maximum points が $R^3[\frac{7}{8}]$にある。このように変形した annuli を改めて $F_1\cup\cdots\cup F_n$と書くことにすると $\underset{c}{\sim}$ の definition より $l \underset{c}{\sim} l'' = (F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[\frac{1}{2}]$, $l''\underset{c}{\sim} l'$。
故に $l\underset{c}{\sim} l'$　　q.e.d.

しかし逆は成立しない。たとえば



$\underset{c}{\sim} 0$　　but　$\not\sim 0$

Fig 3

$R^3[0]$の link l が $R^3[0,1)$で locally flat な genus 0 の surface をはるとき l を weak slice link と呼ぶ。~ 0 は $\underset{w}{\sim}0$, $\underset{c}{\sim}0$, weak slice link になるが, $\underset{w}{\sim}0$, $\underset{c}{\sim}0$, weak slice link の間には強弱関係はないが次の Theorem が成立する。

Theorem 5:　l が weak concordant to zero のとき l が cobordic to zero と weak slice link とが同値になる。

proof:　$l\underset{w}{\sim}0$ とすると Corollary 1.2 より $R^3[0,1]$に disjoint locally flat proper annuli $F_1\cup\cdots\cup F_n$で $\partial(F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[0]$

$= k_1 \cup \cdots \cup k_n$ で $\partial(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1] = (-k_1) \circ \cdots \circ (-k_n)$ なるものが存在する。

$l \underset{c}{\sim} 0$ ならば $k_1 \# \cdots \# k_n \sim 0$ になる。だから $R^3[1,2]$ で $k_1 \# \cdots \# k_n$ を boundary にする locally flat な disk D をはる。そのとき $F = (F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cup D \cup (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$ は locally flat で genus 0 で $\partial F = l$ である, ここで B_i は k_i と k_{i+1} を product する band とする。故に l は weak slice link である。

逆に l を weak slice link とする。$R^3[2]$ で n 個の異なる点 $p_1, \cdots p_n$ をとり $R^3[1,2]$ で $k_1 \circ \cdots \circ k_n$ に disjoint に cones $p_1 * k_1, \cdots p_n * k_n$ を作る。l は weak slice link だから $R^3[-1,0]$ で genus 0 の locally flat な surface F_0 をはる。そのとき $S = F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_n \cup p_1 * k_1 \cup \cdots \cup p_n * k_n$ は 2-sphere で locally knotted points が $p_1, \cdots p_n$ である。そこで $p_1, \cdots p_n$ を通る simple arc α を S 上でとると $(\partial N(\alpha, S), \partial N(\alpha, R^4)) \approx (k_1 \# \cdots \# k_n, \partial N(\alpha, R^4))$ で $k_1 \# \cdots \# k_n \sim 0$。故に $l \underset{c}{\sim} 0$ q.e.d.

最後に concordance, weak concordance と link の signature ([3]) についてのべる。link l の signature, nullity を $\sigma(l), n(l)$ で表わすと

<u>Lemma 5 :</u> l と l' が concordant ならば $\sigma(l) = \sigma(l')$

proof : l と l' がそれぞれ $R^3[0]$, $R^3[1]$ にあるものとし,

$R^3[0,1]$ に concordant を与える annuli $F_1\cup\cdots\cup F_n$ がある。さらに $F_1\cup\cdots\cup F_n$ は Theorem 4 の証明の時のような状態にあると仮定してよい。そのとき [3] の Lemma 6.2, Lemma 7.1 を使うと $\sigma(l)=\sigma(l'')$, $\sigma(l'')=\sigma(l')$ なることがわかる。 q.e.d.

Lemma 5 を使い weak concordant のとき次の事柄が成立する。

<u>Theorem 6 :</u> $l=k_1\cup\cdots\cup k_n$, $l'=k'_1\cup\cdots\cup k'_n$ なる link とし $l \underset{W}{\sim} l'$ ならば, $\sigma(l)-\sum_{i=1}^{n}\sigma(k_i)=\sigma(l')-\sum_{i=1}^{n}\sigma(k'_i)$

proof) : $l \underset{W}{\sim} l'$ だから $R^3[0,1]$ に disjoint な annuli $F_1\cup\cdots\cup F_n$ で $\partial(F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[0]=l$, $\partial(F_1\cup\cdots\cup F_n)\cap R^3[1]=-l'$ なるものが存在する。l の各 component k_i に l と split した knot $-k_i\# k'_i$ を product した link を l'' と書く。$(-k_1\# k'_1)\circ\cdots\circ(-k_n\# k'_n)$ に $R^3[0,\varepsilon]$ で $F_1\cup\cdots\cup F_n$ と交わらないような cone をはる。ここで ε は十分小さな正数とする。すると Theorem 1 より $l'\sim l''$. Lemma 5 と [3] の Lemma 7.3 より

$$
\begin{aligned}
\sigma(l') &= \sigma(l'') \\
&= \sigma(l)+\sum_{i=1}^{n}\sigma(-k_i\# k'_i) \\
&= \sigma(l)-\sum_{i=1}^{n}\sigma(k_i)+\sum_{i=1}^{n}\sigma(k'_i)
\end{aligned}
$$
q.e.d.

References

1. R. H. Fox and J. W. Milnor : Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J. vol. 3 (1966)
2. F. Hosokawa : A concept of cobordism between links, Ann. of Math. vol. 86 (1967)
3. K. Murasugi : On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 117 (1965)
4. D. Rolfsen : Isotopy of links in codimension two, to appear