数理解析研究所講究録
第 160 巻 1972 年 1-4

一階楕円型方程式系の non-coercive 境界値問題

京大 数研　岩崎敦久

ΩをR^{n+1}のC^∞な境界をもつ有界領域とする。

$$(*) \quad \begin{cases} [A(D)+C+\lambda]\,u = f & \text{on } \Omega \\ Bu = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

なる境界値問題を考える。但し、

$A(D) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $C \equiv C(x)$; $A_i(x)$, $C(x)$, $m\times m$ matrices

$B \equiv C(x)$; $m/2 \times m$ matrix.

次の結果が成り立つための十分条件を与える。

(結果) あるλ_0が存在して $\forall\lambda \geq \lambda_0$, $\forall s \geqq 0$, に対して もし $f \in H^s(\Omega)$, $g \in H^{s+1/2}(\partial\Omega)$ なら $u \in H^s(\Omega)$ となる $(*)$ の解が一意的に存在し、次の不等式を満す。

$$\lambda \|u\|_s \leq C_s \{\|f\|_s + \langle\!\langle g \rangle\!\rangle_{s+1/2}\}$$

//

以下、条件をのべる。

(Def) $A(x,\xi) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} A_i(\xi)\xi_i$

(Cond 1) $A(x,\xi)$, $B(x)$, $C(x)$ は $\overline{\Omega}$ で x の C^∞-function，そして $A(x,\xi)-\lambda$ は $(\xi,\lambda)\neq 0$ なら non-singular i.e. $(\xi,\lambda)\neq 0$ なら $\det(A(x,\xi)-\lambda)\neq 0$.

(Def) $n \equiv n(x)$ を $\partial\Omega$ の単位余法線とする。

$$\eta + M(x,\xi,\lambda) \equiv A(x,n)^{-1}\{A(x, n\eta+\xi)-\lambda\}, x\in\partial\Omega$$

(Def) $P_\pm(x,\xi,\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\pm}(\mu + M(x,\xi,\lambda))^{-1}d\mu$

，$x\in\partial\Omega$，n と ξ は独立．：$\Gamma_+(\Gamma_-)$ は $-M(x,\xi,\lambda)$ の正(負)の real part を持つ固有値を囲む曲線。

(Def) $\mathcal{P}(x,\xi,\lambda) \equiv \mathrm{range}\ P_-(x,\xi,\lambda) = \ker P_+(x,\xi,\lambda)$

(Def) $\mathcal{N}(x) \equiv \ker B(x)$

(Def) $Q(x,\xi,\lambda) \equiv \frac{\partial}{\partial\lambda}P_-(x,\xi,\lambda)\Big|_{\lambda=0}$.

(Def) $S^n_{(x_0,\xi_0)}(f) \subset \mathbb{C}^{m/2}$，$f\in\mathbb{C}^m$，$x_0\in\partial\Omega, \xi_0\neq 0$

$h\in S^n_{(x_0,\xi_0)}(f) \Leftrightarrow {}^\exists\mu\geq 0$，$x\in\partial\Omega$，$g\in\mathbb{C}^m$

s.t. $|x-x_0|+|\xi-\xi_0|+|g-f|\leq 1/n$

$|g|=|f|$

$h=\mu B(x)P_-(x,\xi,0)g$。

(Def) $S_{(x_0,\xi_0)}(f) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S^n_{(x_0,\xi_0)}(f)}$

(注) ことわらないかぎり n と ξ は独立であるとする.

(cond 2) $\dim N(x) = \dim P(x,\xi,\lambda) = m/2 \quad x \in \partial\Omega$

(cond 3) $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 0$, $|\xi|^2 + \lambda^2 = 1$ なら $N(x) \cap P(x,\xi,\lambda) = \{0\}$

(cond 4) $x \in \partial\Omega$, $\lambda = 0$, $|\xi|^2 = 1$ なら

$$N(x) \cap P(x,\xi,\lambda) \cap \{f ;\ B(x)Q(x,\xi)f \in S(x,\xi)(f)\} = \{0\}$$

(cond 5) T を $\partial\Omega$ 上の Tangent field とする。

$\exists\, C = C(\xi) > 0$: ξ の連続函数, $1/3 \le \varepsilon < \delta = 1/2$

s.t. $\lambda \geq 0$, $|\xi|^2 + \lambda^2 = 1$, $|f| = 1$, $|g| = 1$, $f \in \mathbb{C}^m$, $g \in \mathbb{C}^{m/2}$, $x \in \partial\Omega$

$\alpha/2 + |\beta|/3 \le 1$ ならば

$$|H^1_{T\alpha\beta}(x,\xi,\lambda) f| \le C\,|D(x,\xi,\lambda) f|^{(1-\delta\alpha-\varepsilon|\beta|)}$$

$$|H^2_{T\alpha\beta}(x,\xi,\lambda) g| \le C\,|D^*(x,\xi,\lambda) g|^{(1-\delta\alpha-\varepsilon|\beta|)}$$

但し $D(x,\xi,\lambda) \equiv B(x)P_-(x,\xi,\lambda)$, P^*_- と D^* は P_- 及び D の adjoint matrices. そして

$$H^1_{T\alpha\beta}(x,\xi,\lambda) \equiv \{T^\alpha \partial_\xi^\beta D(x,\xi,\lambda) - D(x,\xi,\lambda) T^\alpha \partial_\xi^\beta P_-(x,\xi,\lambda)\} P_-(x,\xi,\lambda)$$

$$H^2_{T\alpha\beta}(x,\xi,\lambda) \equiv P^*_-(x,\xi,\lambda) T^\alpha \partial_\xi^\beta D^*(x,\xi,\lambda) \quad 。$$

定 理.

以上 (1〜5) までの条件を仮定すれば (結果) が従う。

この仮定のもとでは Ω を $R^{n+1}_+ \equiv \{(x', x_{n+1}) ;\ x_{n+1} > 0\}$ で微分方程式の係数は x_{n+1} にはよらない、さらに $C \equiv 0$ そして有界領域をのぞけば x' にもよらない場合を考えれば十分であ

3。定理の証明にはHörmanderによるpseudo-differential operatorの結果をつかう。

(注) (Cond 1) のもとで (Cond 2〜4) とは $\lambda>0$ に対し次のような $E(x,\xi,\lambda)$ が存在することである。

$$E(x,\xi,\lambda)\,D(x,\xi,\lambda)=P_-(x,\xi,\lambda)$$

$$D(x,\xi,\lambda)\,E(x,\xi,\lambda)=I$$

$$\|E(x,\xi,\lambda)\|<C/\lambda \quad \text{on } \{|\xi|^2+\lambda^2=1,\ \lambda>0\}。$$