数理解析研究所講究録
第166巻 1972年 1-7

C^*-algebra の Center について

茨城大 理　高橋真映

§1. 序

A を C^*-algebra, Prim A をその structure space とする。Prim A は Jacobson topology で quasi-locally compact space になる。$C^b(\mathrm{Prim}\,A)$ を Prim A 上のすべての有界な複素数値連続函数のつくる可換 C^*-algebra, $C_0(\mathrm{Prim}\,A)$ を無限遠点でゼロになる $C^b(\mathrm{Prim}\,A)$ の元全体の集合とする。本講では A にある条件を与えて $C_0(\mathrm{Prim}\,A)$ が A の center に isomorphic になることを示めす。

§2. Center の同型定理について

B を A の enveloping von Neumann algebra, Z_B をその center とする。$P(A)$ を A のすべての pure state の集合, $\hat{A}$ を A の spectrum とする。すべての $f \in P(A)$ と $z \in Z_B$ に対して, operator $\pi_f(z)$ は scalar である。従って $P(A)$ 上で定義された

複素数値函数 φ_z^0 が存在して，

$$\pi_f(z) = \varphi_z^0(f)\, 1_{H_{\pi_f}}$$

を満す。ただし π_f は f によって定義された表現である。λ^1, λ^2 をそれぞれ canonical mapping；

$$P(A) \longrightarrow \hat{A} \quad , \quad \hat{A} \longrightarrow \mathrm{Prim}(A)$$

とじょう．従って $\hat{A}$ 上の複素数値函数 φ_z^1 と $\mathrm{Prim}(A)$ 上の複素数値函数 φ_z^2 が存在して，

$$\varphi_z^0 = \varphi_z^1 \cdot \lambda^1 \quad , \quad \varphi_z^1 = \varphi_z^2 \cdot \lambda^2$$

を満す。 Z' を A の ideal center つまり $zA \subset A$ となるすべての Z_B の元 z の集合とする．[1] において Dixmier は mapping $z \longrightarrow \varphi_z \,(\equiv \varphi_z^2\,)$ は C^*-algebra Z' と C^*-algebra $C^b(\mathrm{Prim}A)$ の間の isomorphism を与えることを証明した。 さて我々は A の center の φ による image について考察する。次の定理は可換な場合の Gelfand representation theorem の 1 つの 1 般化である。

定理． A を次の条件を満す C^*-algebra，Z を A の center とする．

(*) すべての $\pi \in \hat{A}$ に対して $\pi|_Z \neq 0$ である。

このとき $\varphi(Z) = C_0(\mathrm{Prim}A)$ である。

証明． $z \in Z$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\{\pi \in \hat{A} \mid \|\pi(z)\| \geq \varepsilon\}$ は compact である（Prop. 3.1.7 [2]）．ところで

$\hat{A}$ の topology は λ^* による Prim A の topology の inverse image であるから，$\{J \in \mathrm{Prim}\,A \mid |\varphi_z(J)| \geq \varepsilon\}$ も compact である．このようにして我々は $\varphi(\mathcal{Z}) \subset C_0(\mathrm{Prim}\,A)$ を得る。

逆に，$\varphi_z \in C_0(\mathrm{Prim}\,A)$ を満す $z \in \mathcal{Z}'$ を考えよう。$z \geq 0$ としても1般性を失わない。今 $z \notin A$ と仮定する。ところで $A' = A + \mathcal{Z}'$ とおくと A' は C^*-algebra で A は A' の closed two-sided ideal である (Th. 8 [1])．従って A' は pure state f_0 が存在して

$$f_0|A = 0, \quad f_0(z) = \varepsilon_0 > 0$$

を満す。我々は Prim A を Prim A' の中の open set とみるとき [1] の Theorem 10 によって φ_z の1意的拡張 $\varphi_z' \in C^b(\mathrm{Prim}\,A')$ が存在する． $J_0 = \mathrm{Ker}\,\pi_{f_0}$ とおく，従って $J_0 \in \mathrm{Prim}\,A'$ である。Prim A は Prim A' の中で dense (Th.10 [1]) であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $J_\varepsilon \in \mathrm{Prim}\,A$ が存在して，

$$|\varphi_z(J_\varepsilon) - \varphi_z'(J_0)| \leq \varepsilon$$

である．我々は $\varphi_z'(J_0) = \varepsilon_0$ であることに注意する (実際，φ_z' のつくり方は $z \in \mathcal{Z}'$ と $J \in \mathrm{Prim}\,A'$ に対して $z \bmod. J = \varphi_z'(J)1$ を満す複素数 $\varphi_z'(J)$ が存在する，従って $f_0(z) = \varphi_z'(J_0)$ を得る (Th.10 [2] の証明参照))。ところで φ_z は無限遠点でゼロになる函数であるから，もし family $\{J_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2\}$ が infinite elements を持てば，$\{J_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2\}$ は Prim A の中に limit point を持つ (実際，任意の位相空間で compact set は

i

countablely compact ($\equiv$ Fi-compact) である [4])．今

$$K = \{ J \in \mathrm{Prim}\, A \mid \varphi_z(J) = \varepsilon_0 \}$$

とおこう．従って我々は

(1) 任意の J_0 の近傍 $\mathfrak{U}_\lambda(J_0)$ に対して $K \cap \overline{\mathfrak{U}_\lambda(J_0)} \neq \phi$

ただし $\{\lambda\}$ は direct set である．

を示めすことができる．もし $\{J_\varepsilon \mid 0<\varepsilon<\varepsilon_0/2\}$ が finite set であってもやはり (1) が成立することに注意する． すべての λ に対して $J_\lambda \in K \cap \overline{\mathfrak{U}_\lambda(J_0)}$ としよう．φ_z は無限遠点でゼロになるから K は quasi-compact である．従って上と同様に $\{J_\lambda\}$ は K の中で limit point J_∞ を持つようにできる． $f_\infty \in P(A)$ を $\mathrm{Ker}\,\pi_{f_\infty} = J_\infty$ を満すものとしよう． z_0 を Z の任意の元とし，φ'_{z_0} を φ_{z_0} の1意的拡張な $C^b(\mathrm{Prim}\, A')$ の元とじよう。従って $f_0 \in P_A(A')$ より $\varphi'_{z_0}(J_0) = 0$ である． 1方任意の $\varepsilon>0$ に対して λ_0 が存在して

$$|\varphi_{z_0}(J_\lambda)| < \varepsilon \,, \quad \lambda_0 \le \lambda$$

であるから我々は $\varphi_{z_0}(J_\infty) = 0$，従って $f_\infty(z_0) = 0$ を得る．しかしこれは $\pi_{f_\infty}|z \neq 0$ に反する。従って $z \in A \cap Z' = Z$ である．

証明終り．

次に (*) を満す C^*-algebra A をつくってみよう．A が unit element を持てば trivial であることに注意する。

例. $(A_i)_{i\in I}$ を unit element $1^{(i)}$ を持つ C^*-algebra の family とする。A を family $(A_i)_{i\in I}$ の restriced C^*-algebra (i.e. A は任意の $\varepsilon>0$ に対して finite indeces i を除いては $\|x_i\|<\varepsilon$ を満す element $x=(x_i)\in\prod_{i\in I}A_i$ の集合で sup-norm を持つ) とする. 従って A は discreat space I 上の C^*-algebra A_i によって定義された C^*-algebra である (10.10.1 [2]).
$\rho\in\hat{A}$ としよう. Theorem 10.4.3 [2] によって $i_0\in I$ と $\pi\in\hat{A}_{i_0}$ が存在して,

任意の $x\in A$ に対して, $\rho(x)=\pi(x_{i_0})$

を満す. 今

$$x_i=\begin{cases}1^{(i_0)} & \text{if } i=i_0\\ 0 & \text{if } i\neq i_0\end{cases}$$

と定義すると $x=(x_i)$ は A の元である. ところで Z を A の center とすると, 明らかに $x\in Z$ で $\rho(x)\neq 0$ である。このようにして A は (*) を満す. もし Card $I\geq\aleph_0$ なら A は unit element を持たないことに注意する。

今 A, A' を unit element を持つ C^*-algebra, Z, Z' をその center とする。φ を A から A' への surjective *-homomorphism とする。[5] において Vesterstrøm は次の定理をを証明した。

定理. 次の (i) ~ (iii) は同値である.

(i) $\varphi(Z)=Z'$,

(ii) canonical map $(\varphi|_Z)^\vee$; Prim $Z'\to$ Prim Z は injective,

(iii) J_1', $J_2' \in \mathrm{Prim}\,A'$ が $C(\mathrm{Prim}\,A')$ の元で分離されれば $\check{\varphi}(J_1')$, $\check{\varphi}(J_2')$ も $C(\mathrm{Prim}\,A)$ の元で分離される.

ただし canonical map $\check{\varphi}: \mathrm{Prim}\,A' \longrightarrow \mathrm{Prim}\,A$, $C(\mathrm{Prim}\,A)$ は $\mathrm{Prim}\,A$ 上の複素数値連続函数の全体。

我々は unit element を持たない C^*-algebra に対する上の議論に我々の定理がつかえるのではないかと思う.

§3. 他の structure の場合

A を C^*-algebra, A^{**}を A の second Banach space dual とする。A^{**} は von Neumann algebra となり A^{**} のすべての minimal projection の supremum である central projection $z \in A^{**}$ が存在する。 $M = zA^{**}$ とおく. $A \subset M$ とみることができる。また A が可換の場合には M は maximal ideal space 上のすべての有界複素数値函数のつくる algebra とみることができる.

projection $p \in M$ が g-open とは, A の closed left ideal I が存在して $Mp =$ weak*-closure of I in M. となることである. M の self-adjoint operator b が g-continuous であるとは, b の spectral projection が g-open となることである. [3] において Akemann は g-open projection 全体のつくる structure に対する上の Dixmier の結果に相当する定理として次の定理を証明した。

定理. Aの ideal center ($\equiv Z'$) は $\tilde{Z}$-continuous であるようなMの central element の集合に等しい。

また この定理と Akemannの Gelfand representation theorem (Th. III. 3 [3]) を用いると, 上の structure に対する我々の結果に相当する事柄が容易に示めされる. つまり

定理. ZをAの center とすると, Zは無限遠点でゼロ (Th. III. 3 [3]の中の定義参照) になるZ'の元の集合に等しい.

参考文献

[1] J. Dixmier, Ideal Center of a C^*-algebra, Duke Math. J. 35 (1968) 375–382

[2] ———, Les C^*-algèbres et leurs représentation, Paris, (1964)

[3] C. Akemann, A Gelfand Representation theory for C^*-algebras, Pacific. J. Math. 39,1 (1971) 1–11

[4] G. Backman, L. Narici, Functional Analysis, New York and London (1966)

[5] J. Vesterstrøm, On the homomorphic image of the center of a C^*-algebra, Math. Scand. 29 (1971) 134–136