数理解析研究所講究録
第 167 巻 1972 年 1-5

非正則な場合の Pitman efficiency について

大阪市大　鈴木武

§.

Pitman efficiency については E. Noether の論文（1955, Ann. Math. Statist. 26）で述べられている。そこで対象とされている統計量の列 $\{T_n\}$ には漸近正規性が仮定されており，検定方式も

$$T_n \geqq t_n(\alpha)$$

を棄却域とするものに限定している。

我々が以下述べるのは、この様な場合を含むより一般な場合に於て，Pitman 式の相対効率を求めることである。（Pitman efficiency の概念については，前出の論文か Puri & Sen. (1971). Nonparametric Methods in Multivariate Analysis. New York, John Wiley & Sons. 等を参照して下さい。）

$\{P_{\theta,n} : \theta \in \Theta\}$ $(n \in N,\ N = \{1, 2, \cdots\})$ を sample space $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)$ 上の prob. measure の族の列とする。$\Theta \subset R^1$, θ_0 を Θ の一点，K を R^1 の一つの cone，$\Theta_1 = (K+\theta_0) \cap \Theta$ は θ_0 を集積点にもつものとする。以下考える統計量 T_n は全て $\mathcal{X}_n$ からある一つの固定された Euclidean sample space $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ への $(\mathcal{A}_n, \mathcal{B})$ ─ 可測写像である。今次の様な性質をもつ統計量の列 $\{T_n\}$ と写像の列 $\{\pi_n\}$ を考える。

(1) 各 n に対し，$\pi_n : \Omega_n \longrightarrow \Theta_1$

$$\pi_n(w) = \theta_0 + \varphi(n) \cdot (w - \theta_0)$$

$$\theta_0 \in \Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \quad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \supset \Theta_1$$

ここに φ は次の様なものである。

(a). $a \geq 0$, $\varphi : (a, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$

monotone non-increasing

(b). $\forall \rho > 0$, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\varphi(\rho x)}{\varphi(x)}$ $\left(= a(\rho) \text{ とおく}\right)$ が存在する。

(c). $\lim_{\rho \to +0} a(\rho) = \infty$ $\left(= a(0)\right)$

$\lim_{\rho \to \infty} a(\rho) = 0$ $\left(= a(\infty)\right)$

(d). $\rho \longmapsto a(\rho)$: strictly monotone decreasing

(2) $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ 上の prob. measure の族 $\{Q_w : w \in \Omega\}$ で次の様な性質をもつものが存在する。

(a). $\exists \mu$: σ-finite measure on $\mathcal{Y}$, $\{Q_\omega\} \ll \mu$.

$\frac{dQ_\omega}{d\mu} = g(\cdot|\omega)$ とおく。

(b). $\forall c \in [0, \infty)$, $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega_1$ に対し

$\{y ; g(y|\omega_1) \geq c \cdot g(y|\omega_2)\} \in \mathcal{C}$ ここに

$\mathcal{C} = \{ C \subset \mathcal{Y}$; C 又は C^c (Cの補集合) が $\mathcal{Y}$ の可測凸集合の有限直和として表わされる$\}$.

(c). $\mathcal{Y}$ の全ての凸集合は μ-continuity set.

即ち, その boundary の μ-measure が 0.

(d). $P_{\pi_n(\omega), n} T_n^{-1} \Longrightarrow Q_\omega$ (in distribution)

: Ω_1 の各点 ω の近傍で一様.

$\beta(\omega : \alpha)$ を検定: Q_{θ_0} 対 Q_ω に対する level α-most powerful test の power としたとき

(e). $\exists \omega \in \Omega_1$, $\alpha < \beta(\omega ; \alpha) < 1$

(f). $\omega \rightsquigarrow \beta(\omega ; \alpha)$ は $\alpha < \beta(\omega ; \alpha) < 1$ なる ω に対し, $|\omega - \theta_0|$ の関数として 1 対 1.

(3). $\omega \rightsquigarrow Q_\omega$: 1 対 1 かつ 弱連続.

(4). $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ 上の prob. measure の 族 $\{Q_\omega ; \omega \in \Omega_1\}$ が存在して

$$P_{\pi_n(\omega),n}T_n^{-1} \Longrightarrow Q_\omega \quad (\text{in distribution})$$
$$\forall \omega \in \Omega_1 .$$

今 $\rho(P, Q) = \int_{\mathcal{Y}} \sqrt{\frac{dP}{d\nu}\cdot\frac{dQ}{d\nu}}\, d\nu \quad , \nu = P + Q$ と

定義すると

(5). $\rho(P_{\pi_n(\omega),n}T_n^{-1}, P_{\theta_0,n}T_n^{-1}) \longrightarrow \rho(Q_\omega, Q_{\theta_0})$

: Ω_1 の各点 ω の近傍で一様.

(6). $\exists\, \omega \in \Omega_1, \quad 0 < \rho(Q_\omega, Q_{\theta_0}) < 1$

(7). $\omega \rightsquigarrow \rho(Q_\omega, Q_{\theta_0})$: Ω_1 上連続かつ $0 < \rho(Q_\omega, Q_{\theta_0}) < 1$ をみたす $\omega \in \Omega_1$ に対し $|\omega - \theta_0|$ の関数として 1 対 1.

このとき次の事が分る。

<u>定理1.</u> 一つの統計量の列 $\{T_n\}$ が与えられたとき、条件(1),(2),(3) 又は条件(1),(3),(4)―(7) をみたす列 $\{\pi_n\}, n \in N$ は、もし存在すれば次の意味で一意的である。即ち 他に $\{\pi_n^*\}$ があれば、各 $\omega \neq \theta_0$ について

$$\lim_n \frac{\pi_n^*(\omega) - \theta_0}{\pi_n(\omega) - \theta_0} = k$$

が存在して、k は ω に無関係な正数である。

（但し，$0/0 = 1$，$\infty/0 = \infty$，$0/\infty = 0$ とする）

<u>定理 2.</u> $\{T_n\}$，$\{T_n^*\}$ を条件 (1), (2), (3) をみたす統計量の列とし，特に

(i) $Q_\omega^* = Q_{\pi(\omega)}$，$\omega \in \Omega_1$

$$\pi(\omega) = \theta_0 + C\cdot(\omega - \theta_0) \quad , \quad 0 < C < \infty$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^*(n)}{\varphi(n)}$ $(= \lambda$ とおく。$0 \leq \lambda \leq +\infty)$ が存在する。

が成立しているものとする。今 ϕ 及び ϕ^* を夫々検定：

Q_{θ_0} 対 Q_ω，$Q_{\theta_0}^*$ 対 Q_ω^* に対する level α-most powerful test とする。

このとき test の列 $\{\phi^*(T_n^*)\}$ の $\{\phi(T_n)\}$ に対する Pitman - Noether efficiency $(\equiv e(\{\phi^*(T_n^*)\} : \{\phi(T_n)\}))$ は次式で与えられる。

$$e(\{\phi^*(T_n^*)\} : \{\phi(T_n)\}) = \rho\left(\frac{c}{\lambda}\right)^{-1}$$

ここに $\rho\left(\frac{c}{\lambda}\right)$ は $a\left(\rho\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right) = \frac{c}{\lambda}$ をみたす値である。