数理解析研究所講究録
第 167 巻 1972 年 95-102

中心極限定理における
剰余項の評価

統数研　　清水良一

分布Fは4次までのモーメントをもち、$\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ とする。Fからとられた、大きさnの標本の normalized sum の分布をF_nとして、Edgeworth 展開の剰余項，

$$R_n(x)=F_n(x)-\Phi(x)-\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}(1-x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を考える． $R_n(x)=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ であることは知られているが、こゝでは、Fにもう少し条件をつけて、$|R_n(x)|$の上限を与えることを考えよう． Fが有界変分な密度関数$f(x)$をもつ（total variation of $f(x)=\mathrm{var}\, f=M$ とする）なら、つぎの定理がなりたつ．

定理．　上記の仮定のもとで，

$$(1)\qquad |n\pi R_n(x)|\le\left(\frac{7}{6}+\frac{288}{153}\cdot\left(1-\frac{1}{4\alpha_4}\right)^n+2e^{-\frac{n}{2\alpha_4}}\right)\alpha_4$$

$$+\frac{2}{3n}|\alpha_3|\,e^{-\frac{n}{4\alpha_4}}+\min\left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha_4}M\right)^n,\ \frac{4}{3}\alpha_4 M^2\cdot L^n\right)$$

$$\leqq 3.53\,\alpha_4+\frac{2}{3n}|\alpha_3|+\frac{4}{3}\alpha_4\cdot M^2$$

F が対称なら，

$$(2)\quad |n\pi R_n(x)|\leqq\left(\frac{42}{125}+\frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{3\alpha_4}\right)^n+e^{-\frac{n}{2\alpha_4}}\right)\alpha_4$$

$$+\min\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_4}M\right)^n,\ \frac{3}{4}\alpha_4 M^2\cdot L^n\right)$$

$$\leqq 2.47\,\alpha_4+3\,\alpha_4\,M^2/4.$$

たゞし $L\,(<1)$ は α_4 と M だけできまる正の数である．

証明の概略． つぎの lemma をつかう． 前半は Rogozin による．

lemma 区間 $\left(-\frac{1}{M},\frac{1}{M}\right)$ 上の一様分布の密度を $U(x)$ とすると，

$$\mathrm{var}\ f^{*n}(x)\leqq 2\,U^{*n}(0)\leqq M\cdot\sqrt{\frac{3}{n+1}}\ .$$

F の特性関数を $\varphi(t)$ とすると，

$$|\varphi(t)|\leqq M/|t|\qquad\text{for}\quad t\neq 0$$

さて，

$$G_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}(1-x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dG_n(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 - i\,\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}t^3\right)$$

とおく. inversion formula と lemma から.

(3) $$|R_n(x)| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} t^{-1}\,|\varphi^n(t) - g_n(t\cdot\sqrt{n})|\,dt.$$

とくに対称ならば,

(4) $$|R_n(x)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t^{-1}\,|\varphi^n(t) - e^{-\frac{n}{2}t^2}|\,dt$$

F のモーメントに関する仮定から.

(5) $$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} - i\frac{\alpha_3}{6}t^3 + A\alpha_4 t^4}, \qquad \text{for } |t| \leqq \alpha_4^{-\frac{1}{2}}$$

と書けて, $|A| \leqq (2\alpha_4+5)/(2\alpha_4-1)\cdot 24$, とくに $\alpha_4 \leqq 9/5$ のとき $\mathrm{Re}\,A \leqq 0$. また F が対称のときは;

(6) $$\varphi(t) \leqq e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_4}{24}t^4} \qquad \text{for } |t| \leqq \alpha_4^{-\frac{1}{2}}$$

であることが分る. これより.

(7) $$J_1 \equiv \int_0^{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1}\,|\varphi^n(t) - g_n(t\cdot\sqrt{n})|\,dt \leqq \int_0^{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1}\,|e^{nA\alpha_4 t^4} - 1|\,e^{-\frac{n}{2}t^2}\,dt$$

$$+\int_0^{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1}\left|e^{-i\frac{n}{6}\alpha_3 t^3}-1+i\frac{\alpha_3}{6}nt^3\right|e^{-\frac{n}{2}t^2}dt$$

$$\leqq \frac{7}{12}\alpha_4\, n^{-1}.$$

対称の場合、

$$|\varphi^n(t)-e^{-\frac{n}{2}t^2}| \leqq max\left(\frac{1}{24}e^{-\frac{n}{24}\alpha_4 t^4},\ |A|\right)*n\alpha_4 t^4 e^{-\frac{n}{2}t^2}$$

$$\leqq 0.14\, n\alpha_4\, t^4\, e^{-\frac{n}{2}t^2\cdot\frac{11}{12}}$$

となるから、

$$(8) \qquad J_1 \leqq 0.14\, n\,\alpha_4\int_0^\infty t^3 e^{-\frac{n}{2}t^2\cdot\frac{11}{12}}dt \leqq \frac{42}{125}\alpha_4\cdot n^{-1}$$

次に、

$$\varphi(t) = 1-\frac{t^2}{2}+\frac{\alpha_4}{24}\theta\cdot t^4 = \left(1-\frac{4}{9}t^2\right)+\left(-\frac{1}{18}+\frac{\alpha_4}{24}\theta\cdot t^2\right)t^2$$

$$(|\theta| \leqq 1)$$

と書けるから、 $|\varphi(t)| \leqq 1-\frac{85}{288}t^2$, for $|t| \leqq \frac{3}{2}\alpha_4^{-\frac{1}{2}}$

となり、

$$(9) \qquad J_2 \equiv \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1}|\varphi^n(t)|dt \leqq \alpha_4\int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t\cdot\left(1-\frac{85}{288}t^2\right)^n dt$$

$$= \frac{144}{85}\alpha_4\cdot K_n(\alpha_4)\cdot n^{-1} \leqq \frac{144}{153}\alpha_4\cdot\left(1-\frac{1}{4\alpha_4}\right)^n\cdot n^{-1}.$$

ただし　$K_n(x) = (1 - 85/288x)^{n+1} - (1 - 255/384x)^{n+1}$

$\leqslant \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{4x}\right)^n$

またFが対称のときは

$$|\varphi(t)| \leqslant 1 - t^2/3 \qquad \text{for } |t| \leqslant 2\alpha_4^{-\frac{1}{2}}$$

となるので，

$$(10) \qquad J_2' \equiv \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^{2\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t^{-1} |\varphi^n(t)|\, dt \leqslant \alpha_4 \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^{2\alpha_4^{-\frac{1}{2}}} t \cdot \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^n dt$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\alpha_4 \cdot n^{-1} \cdot K_n'(\alpha_4) \leqslant \frac{9}{4}\alpha_4 n^{-1}\left(1 - \frac{1}{3\alpha_4}\right)^n$$

ただし　$K_n'(x) = (1 - 1/3x)^{n+1} - (1 - 4/3x)^{n+1} \leqslant \frac{3}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{3x}\right)^n$

$$c = \begin{cases} 2\alpha_4^{-\frac{1}{2}}, & \text{F が対称のとき} \\ \frac{3}{2}\alpha_4^{-\frac{1}{2}}, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とおく．　lemma から．

$$(11) \qquad J_3 \equiv \int_c^\infty t^{-1} |\varphi^n(t)|\, dt \leqslant (c^{-1}\cdot M)^n \cdot n^{-1}$$

一方，k を

$$c^{-1} M \sqrt{\frac{3}{k+1}} = L_0 < 1$$

を満足する最小の正の整数とすると，ふたたび lemma を使って、

$$(12)\qquad J_3 = \int_c^\infty |\varphi^k(t)|^{\frac{n}{k}}\, t^{-1}\, dt \leqq (cL_0)^{\frac{n}{k}} \int_c^\infty t^{-1-\frac{n}{k}}\, dt$$

$$= k\cdot n^{-1} L_0^{\frac{n}{k}} \leqq c^{-2}\cdot 3M^2 n^{-1}\cdot L^n$$

$$L = L_0^{\frac{1}{k}} < 1.$$

最後に

$$(13)\qquad J_4 \equiv \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^\infty t^{-1}\cdot |g_n(t\cdot\sqrt{n})|\, dt = \int_{\alpha_4^{-\frac{1}{2}}}^\infty t^{-1}\left(1+\frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}}t^3\right)e^{-\frac{n}{2}t^2}\, dt$$

$$\leqq \alpha_4\cdot n^{-1}\cdot e^{-\frac{n}{2\alpha_4}} + \frac{|\alpha_3|}{3} n^{-2} e^{-\frac{n}{4\alpha_4}}$$

(1) は，(3)，(7)，(9)，(11)，(12)，(13) から．(2) は (4)，(8)，(10)，(11)，(12)，(13) からでる．

もっと一般に，s 次までのモーメントの存在を仮定し，

$$R_{n,s}(x) = F_n(x) - \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Q_1(x)}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{Q_2(x)}{n} + \cdots + \frac{Q_{s-2}(x)}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right)$$

とすると，いまの場合 $\lim_{|t|\to\infty}|\varphi(t)| = 0$ だから．

$$R_{n,s}(x) = o(n^{-\frac{s-2}{2}})$$ となる (c.f. [2] p.220).

$Q_k(x)$ は F の k+2 次までのモーメントで定まる多項式で、これが 0 になるのは、これらのモーメントが、正規分布のそれと一致する場合である。このとき、F_n の、正規分布への収束は"はやい"。例えば、$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 上の一様分布の密度を $u(x)$, $p \geq 0$, q, a, $b > 0$, $p+q=1$ とすると、

$$f(x) = p \cdot \frac{1}{a} u\left(\frac{x}{a}\right) + q \frac{1}{b} u\left(\frac{x}{b}\right)$$

は、ある対称な分布 F の密度関数になる。p, a, b を適当に選んで、F の 7 次までのモーメントを正規分布 $N(0,1)$ のモーメントに一致させることができる。したがって、この分布について、

$$|F_n(x) - \Phi(x)| = o(n^{-\frac{5}{2}}).$$

$p=1$, $a=1$ のとき一様分布になるが、これにたいしては

$$|F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1})$$

である。いま述べた分布の分布関数は折れ線で表わされるから、(0,1) 上の一様分布から、分布 F に従う変数を作ることはよういである。この事実を使って、正規乱数を効率的に作りだすことはできないだろうか?

REFERENCE

[1] Feller,W. (1966). An Introduction to Probability Theory and its Applications II, John Wiley,New York.

[2] Gnedenko,B.D. and Kolmogorov,A.N. (1967). Limit Distributions for Sum of Independent Random Variables (English Translation), Addison-Wesley, Cambridge, Mass.

[3] Rogozin,B.A. (1965)., " On the maximum of the density of the sum of random variables with a unimodal distribution ", Litovsk. Mat. Sb. 5, 499-503, English translation : Selected Transl. Math. Statist. and Pro. vol. 9, 1970, 69-74.