数理解析研究所講究録
第168巻 1972年 1-16

種数2の曲線の族の特異ファイバーについて

名大 理　浪川 幸彦

§0. 序

この研究は，上野健爾（東大）との共同研究による。詳しい結果は我々の論文を見られたい（[9]）。

次の問題を考える。

"
$$\pi : X \longrightarrow D$$

を，円板 $D = \{t \in \mathbb{C} ; |t| < \varepsilon\}$ 上の compact な曲線の族とする。さらに次の2つの仮定を置く。

1） X は非特異曲面で，第一種例外曲線を含まない。

2） 穴あき円板 $D' = D - \{0\}$ 上で π は smooth。$t \in D'$ に対し，一般ファイバー $X_t = \pi^{-1}(t)$ は種数 g の compact Riemann 面である。

この時，特異ファイバー $X_0 = \{\pi = 0\} = \sum n_i C_i$ （C_i は既約，n_i は C_iの重複度）を分類せよ。"

$g=0$ の場合は X_0 も射影曲線 $\mathbb{P}_1$ でしかありえない。$g=1$ の場合は小平によって詳しく研究された（[7]）。我々は $g=2$ の場合を扱う。この方法は小平の研究に由来し、principle としては一般の g でなりたつ。

§1. 特異ファイバーの必要条件 —数値的分類—

特異ファイバー X_0 は、曲線 C_i, その重複度 n_i, 他の C_j との交わり $(C_i \cdot C_j)$（C_i 上の因子として与える）を与えることによって決まる。この節では、因子 $X_0 = \sum n_i C_i$ が、ある種の特異ファイバーとなる為の条件を考える。

X_0 に対し、次の数を対応させよう。

$$\begin{cases} \pi_i = \pi(C_i) & (C_i \text{ の種数}) \\ n_i = C_i \text{ の重複度。} \\ m_i = (K \cdot C_i) & (K \text{ は } X \text{ の canonical divisor}) \\ c_{ij} = (C_i \cdot C_j) & (\text{交叉数}) \end{cases}$$

これらは独立ではなく、曲面の Riemann-Roch の定理により、

$$2\pi_i - 2 = c_{ii} + m_i$$

となっている。

さらに、X_0 がファイバーであることから、

1) X_0 は連結（とくに、$\sum_{i \neq j} c_{ij} > 0$ (j: fix)）。

2) $(C_i \cdot X_0) = 0$ $\therefore$ $\sum_j n_j c_{ij} = 0$

3) $(K \cdot X_0) = 2g-2$ $\therefore$ $\sum_i n_i m_i = 2g-2$

よって

a) $c_{ii} = C_i^2 \leqq 0$

$c_{ii} = 0$ なる $X_0 = n_i C_i$。

$c_{ii} = -1$ なる $\pi_i > 0$。(第一種例外曲線なし)

b) $g > 0$ ならば $m_i = KC_i \geqq 0$ ($\pi_i \geqq 0$ より)

c) $\pi_i = \pi(C_i) \leqq g$. $g \geqq 2$ のとき

$\pi_i = g$ ならば $X_0 = C_i$。

Winters によって、次の存在定理が示された([15])。

<u>定理</u>: $(C_i, \pi_i, n_i, m_i, c_{ij})$ が上の条件をみたし、さらに各 C_i はある滑らかな曲面に含まれているとする。(C_i の特異点の embedding dimension が関係する。)このとき、$X_0 = \sum n_i C_i$ となる曲線族 X があって、$m_i = KC_i$, $c_{ij} = (C_i \cdot C_j)$ となる。

よって、X_0 の数的な型は、上の条件によって分類される。$g=1$ の場合は小平(ibid.)により、$g=2$ の場合は Ogg ([11]) と飯高([6])とにより独立になされた。しかし、この数的な分類のみでは X_0 の幾何的な性質は分らない。例

えば $g=1$ で $X_0=C$（既約）のとき $(C;\ 1, 1, 0, 0)$，となる C は，非特異楕円曲線（小平の分類で，型 I_0）と，1 個の通常重複点をもつ有理曲線（I_1）と，1 個の尖点を持つ有理曲線（II）と 3 種類あるが，各々の幾何的性質は全く違う。

従って，我々はさらに X_0 の幾何的性質を調べなければならない。

§2．特性写像

以下，$g=2$ の場合に話を限ることにする。

$\mathfrak{S}_2=\{Z\in M(2,\mathbb{C})\ ;\ Z={}^tZ,\ \mathrm{Im}\,Z>0\}$ を次数 2 の Siegel 上半平面とする。こゝには symplectic 群 $Sp(2,\mathbb{Z})$ が，各 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in Sp(2,\mathbb{Z})$ をとると，

$$MZ=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

と，$\mathfrak{S}_2$ 上に作用する（cf. [12]）。

$\mathfrak{S}_2$ は二次元の principal polarization をもつ Abel 多様体の moduli の空間として重要である。$\pi':X'\to D'$ は smooth だから，各 $t\in D'$ のファイバー X_t に対し，その Jacobi 多様体 J_t を対応させることにより，Abel 多

標準の族 $\mathcal{J}' \xrightarrow{\varpi} D'$ ができる。これから自然に多価正則写像

$$T_\pi : D' \longrightarrow \mathfrak{S}_2$$

が定義される（詳しくは[13]又は[9]を見られたい）。

二つの正則写像 $T_i : D' \longrightarrow \mathfrak{S}_2$ $(i=1,2)$ が，ある $M \in Sp(2,\mathbb{Z})$ を用いて $T_1(t) = M\,T_2(t)$ $(\forall t \in D')$ となり得る時，T_1 と T_2 とは同値であると呼ぶ。上記の T_π はこの同値関係を除いて，一意的に定まる。

この T_π を族 π の特性写像と呼ぶ。それは次の定理がなりたつからである。

定理.*) 二つの族 $X_i \xrightarrow{\pi_i} D$ $(i=1,2)$ があって，その特性写像達が互いに同値であるとする。この時，D より小さい円板 $E = \{t \in \mathbb{C} ; |t| < \varepsilon'\}$ をとれば，同型写像 $\iota : X_1|E \longrightarrow X_2|E$ があって，次の可換図式をみたす。

$$\begin{tikzcd}
X_1|E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_1|E"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2|E \arrow[d, "\pi_2|E"] \\
E \arrow[r, equal] & E
\end{tikzcd}$$

---

*) p. 9 の脚注参照。

§3. X_0 の特性数の構成 —幾何的分類—

§2の定理によれば，T_π には原点の近傍での X についての情報はすべて含まれている。そこでこの中から，X_0 を特徴づける情報を選びだそう。それは次の3つの段階に分れる。

1) X_0 の戸籍を調べること。

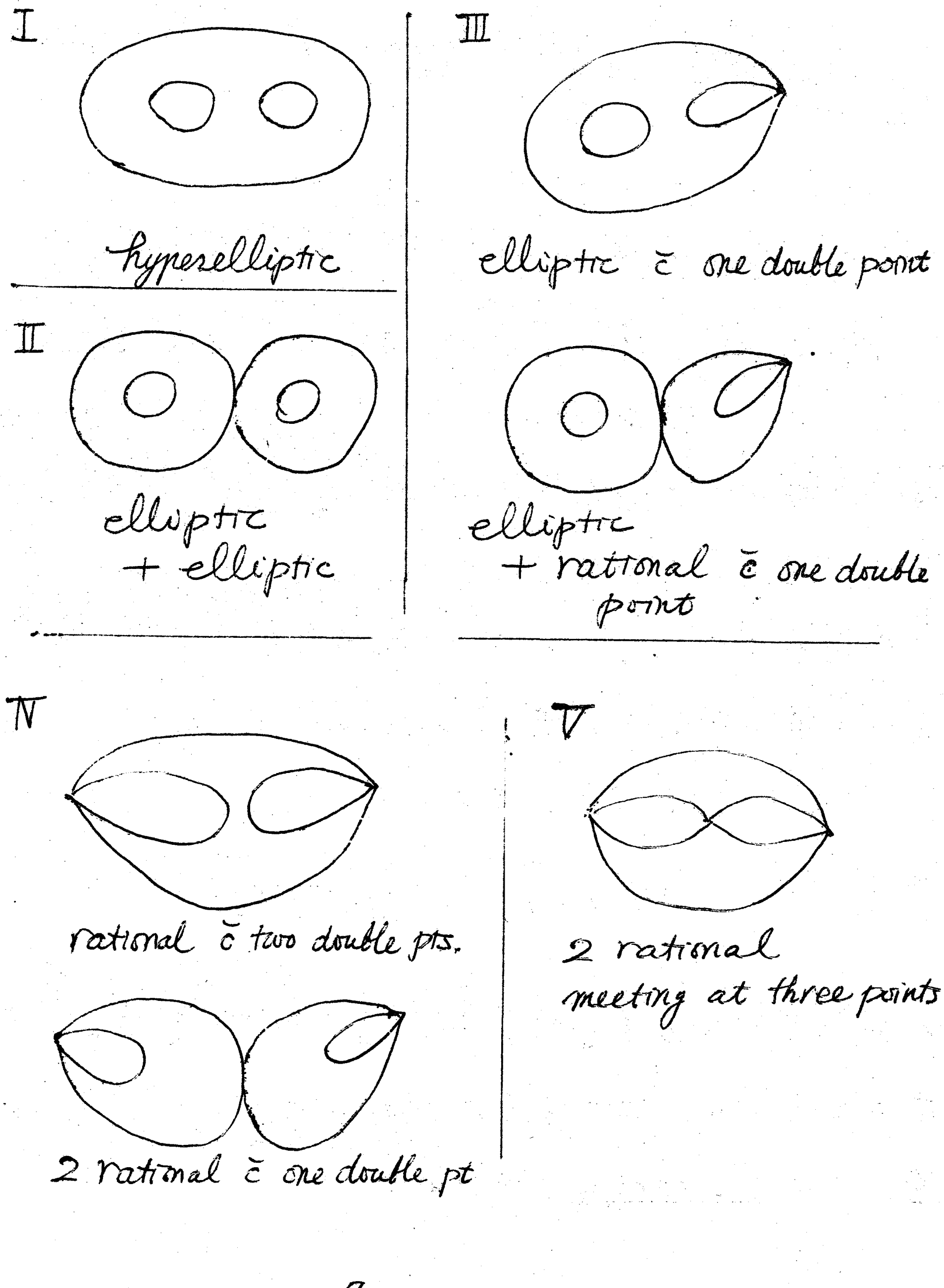
$\mathfrak{S}_2^* = \mathfrak{S}_2 / Sp(2, \mathbb{Z})$ は自然に解析空間となる。この元は principally polarized Abel 多様体の同型類と一対一に対応する。曲線の同型類は，そのJacobi多様体のそれによって決まる（Torelli の定理）から，種数2の閉Riemann面の同型類の全体 $\mathcal{M}_2$ は $\mathfrak{S}_2^*$ の部分集合とみなせる。Hoytの結果（[5]）を更に詳しくして，次のことが分る。

<u>命題</u>. $\mathcal{M}_2$ は $\mathfrak{S}_2^*$ 内の開集合で，その補集合 $\mathcal{N}_2$ は余次元1の既約解析集合である。$\mathcal{N}_2$ 内の点に対応する Abel 多様体は，2つの楕円曲線の直積に自然に偏極構造を入れたものである。*)

さて $\mathcal{M}_2$ は種数2の曲線達の戸籍である。では X_0 の属すべき戸籍は何かと考えると，これは種数2の Riemann 面の極限であるから，戸籍 $\mathcal{M}_2$ をはみ出してしまうことがある。そこで，これら極限全体を含めた戸籍を作る必要がある。即ち

*) 2つの楕円曲線の直積に，別の偏極構造が入って，既約曲線のJacobi多様体になることがある（[10]）。

moduli 空間の compact 化の問題で、代数幾何での大きな問題の一つである。これについては佐武，井草，Mumford らの研究があるが、特に Deligne - Mumford による最近の結果（[２]）は注目すべきである。これによれば、種数２の曲線の極限は、位相的に次のようなもの達である。

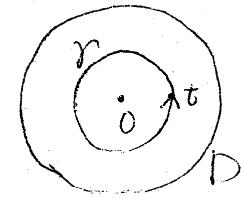


これらの曲線の同型類全体 $\overline{\mathfrak{M}}_2^*$ は compact な射影代数多様体になる（Mumford 未発表）。I 類の全体が $\mathcal{M}_2$，II 類の全点が $\mathcal{N}_2$ である。

さて，特性写像 $T_\pi : D' \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ を考える。自然な全射 $\mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_2^* \subset \overline{\mathfrak{M}}_2^*$ との合成 $\overline{T}_\pi : D' \longrightarrow \overline{\mathfrak{M}}_2^*$ を考える時，極限 $Z_\pi = \lim_{t \to 0} \overline{T}(t) \in \overline{\mathfrak{M}}_2^*$ が X_0 の属すべき戸籍である。

2) X_0 の戸籍内での位置を調べること。

Z_π に対応する曲線を C_π としよう。戸籍内の家族構成は $Aut(C_\pi)$ によって決まる。これは有限群であることが知られている（[2]）。X_0 が $Aut(C_\pi)$ のどこに対応するかは次の様にして分る。



γ を D' 内の原点をひとまわりする円周とする。このとき $T(t)$ を γ にそって解析接続した値 $T(\gamma t)$ は，ある $M_\pi \in Sp(2, \mathbb{Z})$ によって，

$$T(\gamma t) = M_\pi T(t)$$

とかける。この M_π の $Sp(2, \mathbb{Z})$ 内の共役類は π によって一意的に定まり，π の（0 のまわりでの）Picard-Lefschetz 変換，又は monodromy と呼ばれる。

例えば Z_π が I 型であるとしよう。M_π は自然に C_π のJacobi多様体 J_π の自己同型をひきおこすが、これが偏極を保つことから、C_π の自己同型をみちびく。他の場合にも同様にして、M_π は $Aut(C_\pi)$ の元に対応することが分る。

3) さらにもう少し X_0 を調べること。

$\mathcal{N}_2$ の $\overline{\Upsilon}_2^*$ 内での閉包 $\overline{\mathcal{N}_2}$ は余次元1の既約な因子になっている。Z_π の近傍での $\overline{\mathcal{N}_2}$ の定義方程式を f とするとき、

$$\deg \pi = \mathrm{ord}_0 T^* f \quad (\text{in } D)$$

と定義する。

これらを用いて、X_0 を次の様に分類しよう。

型	elliptic		parabolic		
	I	II	III	IV	V
Z_π	I	II	III	IV	V
M_π	有限位数		無限位数		
$\deg\pi$	0	>0	$\geqq 0$	$\geqq 0$	0

この分類は次の定理により、意味をもつ。

定理*) $\pi : X \longrightarrow D$ が与えられているとする。このと

*) parabolic type については未だ厳密な証明がない。

き、特異ファイバー X_0 は Z_π, M_π, $\deg \pi$ によって（解析的に）一意的に定まる。

Z_π が M_π による固定点であることに注意しよう。従って X_0 の分類は、$Sp(2, \mathbb{Z})$ の共役類と、その固定点をしらべることによってなされる。（ただし、$Sp(2, \mathbb{Z})$ の共役類すべてに対応して、X_0 が出てくるという訳ではない。）これ々 elliptic type については既になされていた。即ち、Z_π については Gottschling（[3], [4]）が、その対応する曲線については Bolza（[1]）が、そして M_π については上野（[13], [14]）が、それぞれ調べている。parabolic type については、妥当と思われる分類は既にある（[8]）。

§4. 特異ファイバーの構成

§3 の定理の証明は、逆に Z_π, M_π, $\deg \pi$ を与えたとき、これを特性数とする族をつくる方法を与える。例えば、I 型の場合は次の様にする。

Z_π に対応する曲線を C, M_π に対応する C の自己同型を σ とする。M_π の位数を m とし、$e_m = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$, $E = \{ s \in \mathbb{C} \,;\, |s| < \varepsilon^{m} \}$ と置こう。

自己同型 g :

$$
\begin{array}{rcccl}
g: & C \times E & \longrightarrow & C \times E \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& (x, s) & \longmapsto & (\sigma(x), e_m s)
\end{array}
$$

は位数 m の巡回群 G をつくる。

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_1: X_1 = C \times E/G & \longrightarrow & E/G & \simeq & D \\
& & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& & s & \longmapsto & s^m
\end{array}
$$

は $D' = D - \{0\}$ 上 smooth な解析空間の族である。X_1 の特異点達は、g^k 達の $C \times E$ 上の固定点達から生じる。二次変換によってこれらを除去した $\pi: X \longrightarrow D$ が求めるものである。(たゞし、非特異 model X は才一種例外曲線の生じない様最小のものをとらねばならない。)

例をあげよう。

1) $Z_\pi = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{-2}}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{-1+\sqrt{-2}}{2} \end{pmatrix} \longleftrightarrow C: y^2 = x(x^4+1)$

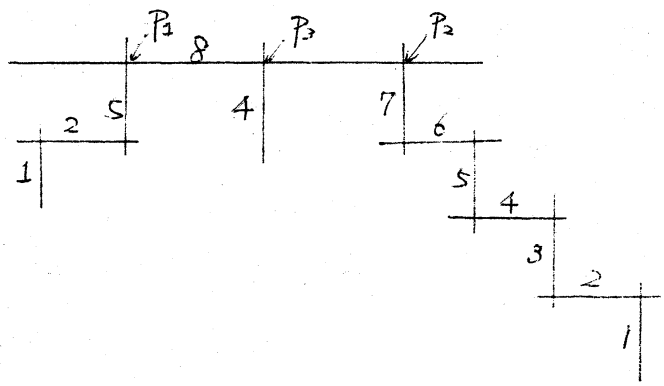
$M_\pi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \sigma: (x, y) \longrightarrow (\sqrt{-1}x, -e_8 y)$

$\operatorname{ord} M_\pi = 8$

g の固定点 : $p_1 = (x, y; s) = (0, 0; 0)$
$p_2 = (\infty; 0)$

g^4 の固定点：上の他4点で、いずれも
$p_3 = (e_8, 0, 0)$ に G-同値。

よって X_0 は



(すべて成分は $\mathbb{P}_1$, 互いに単純に交わる。
数字は重複度。)

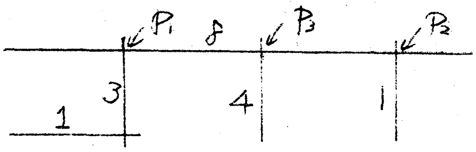
となる。

2) 1) は X_0 をみて，その形の由来の良く分る例である。ところが X_0 をみてもすぐには由来の分らぬものがある。

Z_π : 1) に同じ.

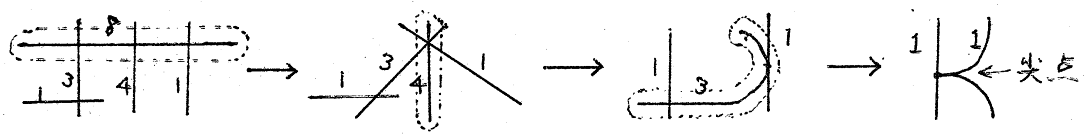
$M_\pi' = - M_\pi$ (in 1)) $\longleftrightarrow \sigma'$. $(x, y) \to (\sqrt{-1}\,x, e_8 y)$

すると固定点は同じだが，その特異点の状態がかわって，X_1 の特異点を標準的に除去すると次のようになる。



これは例外曲線を含んでいるから、次のように次々とcontract

できて、結局最後の図が求める X_0 になる。



X_0

3) 最後に $\deg \pi$ がどの様にあらわれるかを例で示そう。

$$Z_\pi = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow C = E_1 + E_2$$

(2つの楕円曲線)

$(\mathrm{Im}\, z_1 > 0,\ \mathrm{Im}\, z_2 > 0)$

$M_\pi = I$ (単位行列) $\longleftrightarrow$ $\sigma = \text{identity}$

$\deg \pi = d > 0$

$$\begin{array}{rccc} T: & D & \longrightarrow & \mathfrak{S}_2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} z_1 & t^d \\ t^d & z_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(t: 十分小)

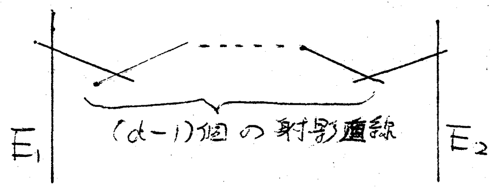
は明らかに上記の特性数をもつ。$\mathfrak{S}_2$ 上には曲線の族 $\mathcal{C}$ があって、各点のファイバーは対応する曲線になっている。$p = E_1 \cap E_2$ の近くで $\mathcal{C}$ は

$$\mathcal{C} = \{xy - z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^5 = \{x, y, z_1, z_2, z_3\}$$

とかけているから、$\mathcal{C}$ の T による引き戻し $\mathcal{C}_D = \mathcal{C} \times_{\mathfrak{S}_2} D$ は $(p, 0)$ の近くで

$$\mathcal{C}_D = \{xy - t^d = 0\} \subset \mathbb{C}^3 = \{x, y, t\}$$

とかける。$\mathcal{C}_D$ は $(p, 0)$ に於てのみ特異点をもつ、これを除去すれば、上記の特性数をもつ族 $\pi: X \longrightarrow D$ が得られる。ところが、容易に分るように、X_0 は



となる。

REFERENCES

[1] Bolza, O. :On binary sextics with linear transformations into themselves, Amer. J. Math., Vol.10, (1888) pp47-70.

[2] Deligne, P. & Mumford, D. : The irreducibility of the space of curves of given genus, Volume dédié au Professeur Oscar Zariski, Publ. I.H.E.S., Vol.36 (1969), pp75-110.

[3] Gottschling, E. : Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe, Math. Ann., Vol.143 (1961) pp111-149.

[4] Gottschling, E. : Über die Fixpunktergruppe der Siegelschen Modulgruppe, Math. Ann., Vol.143 (1961),

pp399-430.

[5] Hoyt, W. L. : On products and algebraic families of jacobian varieties, Ann. of Math. Vol.77(1963), pp415-423.

[6] Iitaka, S. : On the degenerates of a normally polarized abelian variety of dimension 2 and an algebraic curve of genus 2, (in Japanese), Master degree thesis, 1967.

[7] Kodaira, K. : On compact analytic surfaces, II-III, Ann. of Math., Vol.77 &78 (1963), pp563-626 & 1-40.

[8] Namikawa, Y. & Ueno, K. : The complete classification of fibres of pencils of curves of genus two (to appear).

[9] Namikawa, Y. & Ueno, K. : On fibres of pencils of curves of genus two (to appear).

[10] Hayashida, T. & Nishi, M. : Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves, J. Math. Soc. Japan, Vol.17 (1965), pp1-16.

[11] Ogg, A. P. ; On pencils of curves of genus two, Topology, Vol.5 (1966), pp355-362.

[12] Siegel, C. L. : Symplectic geometry, Academic Press, New York, 1964 ; Gesammelte Abhandlungen, Vol.II pp274-359, Springer, Berlin, 1966.

[13] Ueno, K.: On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2, I., J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, Vol.18, (1971), pp37-95.

[14] Ueno, K. : Ditto, II, (to appear in J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo).

[15] Winters, G. B. : On the existence of certain families of curves (to appear).