数理解析研究所講究録
第168巻 1972年 17-27

多次元径数を持つ正規定常過程のマルコフ性 (II)

阪大 理　小谷 眞一

§1 序.

前回の報告[1]では多次元径数正規定常過程がマルコフ性をもつための1つの十分条件を与えた。この報告ではその延長線上にある2つの問題について述べる。

1つはこの定常過程の spectral density Δ にある制限を設けることにより，マルコフ性と Δ^{-1} が infra exponential type の entire function になることが同値であることを示すことであるが，これは[2]の要約である。方法は $Z\in\mathcal{L}^2(\Delta)$ の元の Fourier 変換をある Ultradistribution の空間で実現することにある。

他の1つは Process がマルコフの場合の Prediction と境界値問題との関係についての話である。

ここでマルコフ性の定義を与えておこう。

$\mathbb{R}^d$ に径数をもつ確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ 上の正規定常過程を $X=$

$(X(x,\omega)\ ; x\in\mathbb{R}^d\cdot\omega\in\Omega)$ とする。

即ち，① $X:\ \mathbb{R}^d\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 可測関数

②(平均 0) $\displaystyle\int_\Omega X(x,\omega)\,dP(\omega)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^d$

以後簡単のため $X(x)\equiv X(x,\omega)$ とかく。

③(正規) X の correlation R を $R(x,y)=\int_\Omega X(x)X(y)\,dP$

としたとき $\forall x_1,\ ,x_n\in\mathbb{R}^d$ に対して．

$$P(\ (X(x_1),\ ,\ ,X(x_n))\in E)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\det v}\int_E e^{-\frac{1}{2}xv^{-1}x}\,dx$$

但し $v=(\ R(x_i,x_j))$，E は $\mathbb{R}^d$ の Borel set である。

④(定常性)

$$R(x,y)=\,^{\exists}R(x-y)$$

をみたす Process のことである。R は定義より non-negative definite であるから連続性があれば Bochner の定理より測度 $d\sigma$ の Fourier 変換で表わされるが，ここではさらに $d\sigma$ が density Δ をもつと仮定する。

即ち $\qquad d\sigma(\lambda)=\Delta(\lambda)\,d\lambda.$

次に $\mathbb{B}$ の sub σ-fields を導入するが，G は $\mathbb{R}^d$ の開集合，D は $\mathbb{R}^d$ の有界閉集合を表わすものとする。$\mathbb{B}(G)=\sigma(\ X(x):x\in G)$ $\underset{i.e}{=}$ $\{(X(x):x\in G)$ をすべて可測にする最小の σ-field $\}$ として，D に対して $\mathbb{B}_\pm(D)$，$\partial\mathbb{B}(D)$ と次のように定める。

$$\mathbb{B}_+(D) = \bigcap_{G \supset D^c} \mathbb{B}(G)$$

$$\mathbb{B}_-(D) = \bigcap_{G \supset \overline{D}} \mathbb{B}(G)$$

$$\partial\mathbb{B}(D) = \bigcap_{G \supset \partial D} \mathbb{B}(G)$$

このとき $\mathbb{X}$ のマルコフ性の定義は次のようになる。

<u>Def. 1</u> (McKean [3])

$\mathbb{X}$ が $\mathcal{D}_\delta$- マルコフ

$\Leftrightarrow \quad \mathbb{B}_-(D) \perp\!\!\!\perp_{\partial\mathbb{B}(D)} \mathbb{B}_+(D) \quad , {}^\forall D$ (有界)

$$\left(\underset{i.e}{\Leftrightarrow} \quad P(B_- \cap B_+ \mid \partial\mathbb{B}(D)) = P(B_- \mid \partial\mathbb{B}(D))\, P(B_+ \mid \partial\mathbb{B}(D)) \atop {}^\forall B_\pm \in \mathbb{B}_\pm(D), \quad {}^\forall D(\text{有界}) \right)$$

$\mathbb{X}$ が正規定常の場合は，この定義を関数空間の言葉で言いかえることができる。$\mathcal{H}$ を R を再生核にもつ (Complex) Hilbert 空間，$\mathcal{Z} = \mathcal{L}^2(\Delta)$ とするとき，G に対して $\mathbb{B}(G)$ に対応する，$\mathcal{H}(G) = \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(R(\cdot - x) : x \in G)$，$\mathcal{Z}(G) = \mathcal{L}_{\mathcal{Z}}(e^{i\cdot x} : x \in G)$ を導入して，$\mathcal{H}_\pm(D)$, $\partial\mathcal{H}(D)$, $\mathcal{Z}_\pm(D)$, $\partial\mathcal{Z}(D)$ をそれぞれきめると，次の補題が成り立つ。

<u>Lem. 2</u>

$\mathbb{X}$ が $\mathcal{D}_\delta$- マルコフ

$\Leftrightarrow \quad \partial\mathcal{H}(D) = P_{\mathcal{H}_-(D)}\mathcal{H}_+(D) \qquad {}^\forall D$

$$\Longleftrightarrow \quad \partial Z(D) = P_{Z_-(D)} Z_+(D) \qquad {}^{\forall}D$$

但し $P_{\mathcal{H}_-(D)}$, $P_{Z_-(D)}$ は $\mathcal{H}_-(D)$, $Z_-(D)$ への projection を表わす。

$\mathcal{H}$ と Z は次の対応で unitary 同型であることを注意しておく。

$$\mathcal{H}(G) \longleftrightarrow Z(G)$$

(1.1)

$$\circ \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda\cdot x} f(\lambda)\Delta(\lambda)d\lambda$$

$$\circ \quad \|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 \Delta(\lambda)d\lambda$$

以後 φ の Fourier 変換 $\hat{\varphi}$ を次のように定義する。

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda\cdot x}\varphi(x)dx$$

§2 マルコフ性の Δ による特徴付け.

この§は [2] の要約である。Δ に対して次の制限を設ける。

(*) 非負単調増大連続関数 T で積分の収束条件 $\int^{+\infty}\frac{T(\rho)}{\rho^2}d\rho < +\infty$ をみたすものがあり, Δ は次の条件をみたす。

① $\dfrac{1}{\Delta(x)} \leq C\,e^{T(|x|)}$ $\quad |x|$ 十分大

② $\dfrac{1}{\Delta} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

このTについては次の補題が成りたつ。

<u>*Lem. 3*</u> (M.C. Roumieu [4])

Tが非負単調増大連続関数で $\int^{+\infty}\frac{T(\rho)}{\rho^2}d\rho<+\infty$ ならば，正の単調増大列 $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ で次の条件をみたすものが存在する。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_{k-1}}{M_k}<+\infty$

② $M_{k-1}M_{k+1}\leq M_k^2 \quad (k=1,2,\cdots)$

③ ${}^{\forall}h>0$ に対して

$$\lim_{\rho\uparrow+\infty}\{M(\rho/h)-(T(\rho)+\sqrt{\rho})\}=+\infty$$

(但し $M(\rho)=\log\sup_{k\geq 0}\frac{\rho^k M_0}{M_k}$)

Mを使って定義される support compact な Ultra-differentiable な test function の空間を $\mathcal{D}_M$ とする。$\mathcal{D}_M$ 及び $\mathcal{D}_M'$ については H. Komatsu [5] に要約してある。(但し $\mathcal{D}_M$ は Roumieu type.)

<u>*Lem. 4*</u>

$\mathcal{D}_M$ は $\mathcal{H}$ の dense な subset で injection は連続である。

$f\in Z$ に対して $\hat{f}\in\mathcal{H}'$ を次のように定義する。

$u \in \mathcal{H}$ とすると (1,1) より $^{\exists !} g \in Z$, $u = \widehat{g\Delta}$ となる。この g を使って

$$\langle \hat{f}, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) g(\lambda) \Delta(\lambda) d\lambda$$

と定義する。$|\langle \hat{f}, u \rangle| \le \|f\|_Z \|g\|_Z = \|f\|_Z \|u\|_{\mathcal{H}}$ であるから、$\hat{f} \in \mathcal{H}'$ となるのである。

Lem.4 より $\mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{D}_H'$ (injection 連続) となる。$\hat{f}$ を $\mathcal{D}_H'$ の元とみることにより次の定理が成り立つ。

Th. 5

① $Z_-(D) = \{ f \in Z \mid \operatorname{supp} \hat{f} \subset \overline{D} \}$ $\quad {}^{\forall} D$ (有界)

(注: Paley-Wienerの定理より $Z_-(D)$ の元はとくに entire function である。)

② $Z_-(D)$ は2変数として連続な再生核をもつ。

Th. 6

X が $\mathcal{D}_0$-マルコフ

$\Leftrightarrow \Delta^{-1} = P \qquad P$: infra exponential type の entire function.

[1] で Th. 6 の片方に相当する「$\Delta^{-1} = P$ なら X は $\mathcal{D}_0$-マルコフである。」を示したが、そのときの主要な補題が今の場合 Th. 5 になっている。制限(*)を設けて Ultradistribution を使っ

たのは，定理5を示すとき $\mathcal{Q}$ を位相と sheaf-property をもった関数空間に埋め込む必要があったからであるが，定理6の必要条件も容易に示せるからでもある。

§3. Prediction と境界値問題についての一考察．（$\mathcal{X}$ が二ルコフの場合。）

この§では $\mathcal{X}$ は二ルコフで，Δ は条件(H)をみたしているとする。

$u \in \mathcal{H}$ に対して $H_{\partial D}(x, u) = (P_{\partial\mathcal{H}(D)} u)(x)$ とおく。
$\mathcal{H}$ の元は連続関数であるから右辺は意味がある。

<u>Lem. 7</u>

① $H_{\partial D}(x, \cdot) \in \mathcal{H}'$

② $\mathrm{supp}\, H_{\partial D}(x, \cdot) \subset \partial D$ （$\mathcal{D}_H'$ の元としての support.）

「証明」 ① $u \in \mathcal{H}$ とすると

$$\begin{aligned} |H_{\partial D}(x, u)| &= |(P_{\partial\mathcal{H}(D)} u)(x)| \\ &= |(P_{\partial\mathcal{H}(D)} u, R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}| \\ &= |(u, P_{\partial\mathcal{H}(D)} R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \| P_{\partial\mathcal{H}(D)} R(\cdot - x) \|_{\mathcal{H}} \, \| u \|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

より明らかである。

②：$\varphi \in \mathcal{D}_M$, $\mathrm{supp}\,\varphi \cap \partial D = \phi$ とする。∂D は compact であるから $\exists \varepsilon > 0$, $\mathrm{supp}\,\varphi \cap (\partial D)_\varepsilon = \phi$ （但し $(\partial D)_\varepsilon$ は ∂D の ε-近傍を表わす。）

だから $R(\cdot - x)$: $x \in (\partial D)_\varepsilon$ に対しては

$$(\varphi,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} = \varphi(x) = 0$$

即ち $\varphi \in \mathcal{H}((\partial D)_\varepsilon)^{\perp}$ となる。$\partial\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{H}((\partial D)_\varepsilon)$ であるから $\varphi \in (\partial\mathcal{H}(D))^{\perp}$

これは $H_{\partial D}(x, \varphi) = (P_{\partial\mathcal{H}(D)}\varphi)(x) \equiv 0$

を示している。「証明終り」

さて Process X の Prediction を空間 $\mathcal{H}$ で考えると次のようになる。

「$\mathcal{H}_+(D)$ の元 u に1番近い $\mathcal{H}_-(D)$ の元 v は何か。」

明らかに $v = P_{\mathcal{H}_-(D)}u$ であるが，ここでは v が u からどのようにしてきまるかを作用素 $P(i\partial)$ （$P = \Delta^{-1}$）でみてみよう。

<u>Prop. 8</u>

$u \in \mathcal{H}_+(D)$ に対して $v = P_{\mathcal{H}_-(D)}u$ とすると

① $\begin{cases} v = u & \text{on } D\ (\overline{D}) \\ P(i\partial)v = 0 & \text{on } D^c \end{cases}$

② $\qquad v(x) = H_{\partial D}(x, u) \qquad {}^{\forall}x \in \mathbb{R}^d$

「証明」① $x \in D$ に対しては

$$\begin{aligned} v(x) &= (P_{\mathcal{H}_-(D)} u)(x) \\ &= (P_{\mathcal{H}_-(D)} u,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} \\ &= (u,\ P_{\mathcal{H}_-(D)} R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} \\ &= (u,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}} \quad (\because\ R(\cdot - x) \in \mathcal{H}_-(D)) \\ &= u(x) \end{aligned}$$

となるから①は示された。

②は $\mathcal{K}$ がエルミート性をもつから Lem. 2 より $P_{\mathcal{H}_-(D)}\mathcal{H}_+(D) = \partial\mathcal{H}(D)$ となる。だから $u \in \mathcal{H}_+(D)$ に対しては $v(x) = (P_{\partial\mathcal{H}(D)}u)(x)$ $(= (P_{\underline{\mathcal{H}(D)}}u)(x)) = H_{\partial D}(x, u)$ である。　　「証明終り」

$\mathcal{H}_-(D) = \mathcal{H}(D)$ を仮定するならば Proposition 8 により v は境界条件が u に等しく D の外部で P-harmonic な $\mathcal{H}$ の元として一意的にきまっており，harmonic measure に相当するのが $H_{\partial D}(x, \cdot)$ である。とくに $P(i\partial)$ が（有限階）の微分作用素のときは境界条件としてどのようなものをおけば，この境界値問題が well-posed になるかということは興味あることであるが，それは②より $H_{\partial D}(x, \cdot)$ の形と関係している。

定理5より $\partial\mathcal{Z}(D)$ は再生核 $J_{\partial D}$ をもっているが特に $H_{\partial D}$

を$J_{\partial D}$で表わすことを考えよう。

Th. 9

$$H_{\partial D}(x,\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\cdot x}\,\overline{\widehat{J^{\lambda}_{\partial D}}}\,\frac{1}{p(\lambda)}\,d\lambda$$

(積分は$\mathcal{H}'$での弱積分。)

「証明」　$u \in \mathcal{H}$に対して，$u = \widehat{\frac{f}{p}}$とすると

$$\langle \overline{\widehat{J^{\lambda}_{\partial D}}}, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{J^{\lambda}_{\partial D}(x)}\, f(x)\,\frac{1}{p(x)}\,dx$$

$$= (P_{\partial Z(D)} f)(\lambda)$$

であるから　$\left\langle \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda x}\,\overline{\widehat{J^{\lambda}_{\partial D}}}\,\frac{1}{p(\lambda)}\,d\lambda,\ u \right\rangle$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda x}\,(P_{\partial Z(D)} f)(\lambda)\,\frac{1}{p(\lambda)}\,d\lambda$$

$$= (P_{\partial Z(D)} f,\ e^{i\cdot x})_Z$$

$$= (P_{\partial\mathcal{H}(D)} u,\ R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}$$

$$= (P_{\partial\mathcal{H}(D)} u)(x)$$

$$= H_{\partial D}(x, u)$$

となりTh. 9は示された。　「証明終り」

参考文献

[1] S. Kotani. and Y. Okabe

On the Markovian property of stationary Gaussian processes with a multi-dimentional parameter.

数理解析研究所講究録.

[2] S. Kotani

$\mathbb{R}^d$-径数正規定常過程のマルコフ性について.

修士論文.

[3] H.P. McKean, JR

Brownian motion with a several dimentional time.

Theory of Prob. and its appli. 8 (1963)

[4] M.C. Roumieu.

Sur quelques extensions de la notion de distribution.

Ann. Scient. Éc norm. Sup. 3 série 77

[5] H. Komatsu.

Ultradistributions and hyperfunctions.

数理解析研究所講究録.