数理解析研究所講究録
第 168 巻 1972 年 104-113

重力場と量子論*

岩崎洋一

一方で重力を一般相対論によって幾何学として理解し，他方で電磁相互作用など他の相互作用は量子論によって理解するということは，自然を統一的に把握したいという観点からは不満足である．重力も他の相互作用と同じ枠組で考えられないだろうか？ この立場にたって，どのようにして理論が作られるか，その理論の問題点，およびその理論の内容等を考えてみたい．

§1. 重力をどう考えるか？

重力と共に，近代物理学が始まったといっても過言でない程，物理学にとって，重力相互作用は重要な役割をはたしてきた．ところが，ここ数十年の間，重力理論は，多くの人の興味の中心からは離れたところに位置していた．この理由としては，ほとんどの物理現象が，ニュートン力学で説明でき，それからのずれも，アインシュタインのいわゆる“一般相対性理論”*で説明できること，およびそれ以上理論の修正を求めるような実験データが存在しないことが挙げられよう．

京都大学基礎物理学研究所
606 京都市左京区北白川追分町

* 1971 年 6 月の日本物理学会春の分科会（東大・本郷）での講演を基にして，それに手を加えたものである．

* 一般相対性理論という名称は，アインシュタイン自身による命名であるが，内容を正しく表わしていないと思われる．正しくは，アインシュタインの重力理論と呼ぶべきであろう．この点に関しては，Fock の教科書に詳しく書かれている．

ところで，最近，重力理論に対してまたかなり興味がもたれている．この原因としては，一つは，天体関係の新しい実験事実に刺激されたこと，もう一つは，場の理論の発散の困難を重力相互作用を考慮することによって解決しようという理論的興味，の二つが挙げられるだろう．ここで，天体関係の新しい実験事実といったのは，大きくは二つに分けられる．一つは，パルサーが数多く発見され，さらには，ぎょしゃ座の中に，ブラック・ホール* らしきものが発見されたというように，今まで観測されていなかったような型の星が次から次へと発見されたことである．もう一つは，Dicke と Goldenberg によって，太陽の扁平度が測定され，それによると扁平度 Δ は 5×10^{-5} である ($\Delta=(r_{\mathrm{eq.}}-r_{\mathrm{pole.}})/r$; $r_{\mathrm{eq.}}$ と $r_{\mathrm{pole.}}$ は赤道方向および極方向の半径)．太陽は地球と同じように自転しているから，扁平していることは不思議ないが，その数値が普通予想されていたものより，約一けた大きかったのである．この値から，太陽の質量4重極モーメントを求めることができるが，4重極モーメントによるポテンシャルは r^{-3} に比例するから，ニュートン・ポテンシャル r^{-1} に対する摂動になり，楕円運動の近日点はそれによって移動することになる．この移動の割合を計算してみると，3.4″/100年となる．この値は，普通アインシュタインの理論で説明されている 43″/100年の 8% にあたる．いい方をかえれば，ニュートン力学だけでは説明できないで残る近日点の移動の割合は，普通いわれている 43″/100年の代わりに，39.6″/100年となる訳である．すなわち，この実験を信用すれば，アインシュタインのいわゆる“一般相対性理論”は正しくないということになる．これは一大事である．理論家としては，まず実験を疑いたくなるが，理論自体を再検討することも必要であろう．この2点に加えて，もちろん，ウェーバーによって重力波が実際に観測されたことも，大きな刺激になっている．

以上，なぜ，最近，重力理論に対する興味がまた復活しているかという理由を，実験と理論の面から一つずつ挙げたが，これらよりもっと大きな理由があると思う．その理由は，地味ではあるが，根強くかつ重要な理由である．すなわち，自然をなるべく統一的に把握したいという，物理をやる上でも，もっともナイーブな願望であると思う．たとえば，H, Li, K･･･ のスペクトルはA理論で非常に良く説明でき，他方，He, Ar,･･･ のスペクトルはB理論で説明できるが，A理論とB理論は独立の理論であるというのでは，誰も満足しないと思う．

ところで，重力と他の相互作用との関係は，大雑把にいうと，

$$\begin{array}{ll} \text{重力相互作用} & \cdots\cdots\text{一般相対論} \\ \left.\begin{array}{l}\text{電磁}\ 〃\\ \text{強い}\ 〃\\ \text{弱い}\ 〃\end{array}\right\} & \cdots\cdots\text{場の量子論}\end{array}$$

ということになり，不満足な状態にある．譬喩的にいえば，重力相互作用は，プラトン的に幾何学としてとらえられ，他の相互作用は，デモクリトス的に粒子物理として理解されているともいえるであろう．これらを統一的に考えようというのは，けだし当然のことである．

さて，アインシュタインが“一般相対性理論”を創った時には，重力と電磁相互作用のみが，はっきりと認識されていた訳で，その一方の重力を，“一般相対性原理”という美事な理論によって説明できた時に，もう一方の電磁相互作用をも，同じように幾何学として統一しようと考えたのは，自然なことであると思う.* これが統一場理論への指向であるが，残念ながら成功しなかった．

しかし，現在においては，この二つの相互作用の他にも，強い相互作用，弱い相互作用が存在することが分かっており，重力以外の三つの相互作用は場の量子論の枠で考えられている．特に電磁相互作用に関しては，ミューオンの異常磁気能率，ラム・シフトなど，α の二次，三次まで定量的にぴたりと良くあっている．(もちろん，場の量子論自体が，発散の困難などを含んでおり，修正されなければならないし，強い相互作用が場の量子論の枠内で説明できない可能性も存在す

* 時空構造が非常に特異になり，たとえば，時間と空間とが逆転したようになり，その近傍にいると，時間と共に，その中にのみ込まれてしまい，その物質の細かい点は痕跡をとどめない．詳しくは，たとえば，Physics Today **24** (1971) No. 1, 30 の J. A. Wheeler の解説を見よ．

* アインシュタインが量子力学に対して批判的であったのは，この事も大きく作用しているのではないかと思う．ただし，推測だけで，文献その他に基づいている訳ではない．

106

るという保留事項付ではあるが.) これらの点を考えると，アインシュタインの考え方と完全に逆に，重力相互作用を，他の相互作用と同じように，場の量子論で理解できないかという問題を設定すべきであると思う．

ところで，重力場を量子化するといっても，大きく分けて，次の二つの立場が存在するように思える．

1° リーマン幾何を量子化する

2° ミンコフスキー空間（たいらな空間）から出発して，他の相互作用と同等に考える

この中で，1° の立場は，"幾何を量子化" するという概念が，本当に存在するのかどうか，という点が問題で，特に，量子論の不確定性原理との両立ができないのではないかと思われる．また，重力を他の相互作用と初めから異質なものとみなしている点も不満足であるので，ここでは 1° の立場には立たないで，2° の立場で考えたい．

2° の立場というのは，一応，アインシュタインの"一般相対性原理"とは独立に，別の立場で，重力作用を説明できるというのである．1° の立場ではないことを強調するためもあって，重力場の量子論とはせずに，重力場と量子論という題目にしたのである．そこでプログラムは次のようになる．

①場の量子論（粒子物理）として，重力理論をいかにつくるか？

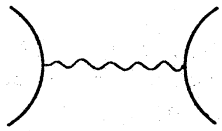
②その理論は無矛盾か？

③その理論は実験を正しく記述するか？

以下，この順序で述べていきたい．

§2. 粒子物理として，重力理論をいかにつくるか？

重力は，古くから知られているように，ニュートン・ポテンシャル，$1/r$ ポテンシャルによって，ごく少数の例外（たとえば水星の近日点移動）を除いて，非常に良く説明される．粒子物理（場の量子論）では，第1図のように，これを粒子の交換によって説明するのである．$1/r$ 法則は，太陽系の大きさ位ではよく成りたっていることが分かっているので，その粒子のコンプトン波長は，太陽系の半径程度以上と考えてよいであろう．さらに，その粒子の質量は厳密にゼロであると仮定してよいであろう．このゼロ質量の粒子のことを，重力粒子（グラヴィトン）と呼ぶ．



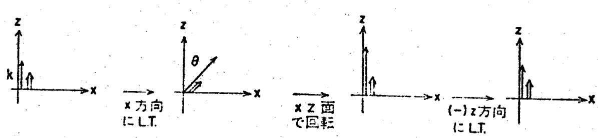
第1図 粒子交換による重力相互作用．

次に，その粒子のスピンはいくつであろうか？ それを決めるためには，少し前準備が必要である．

電磁場を4次元ベクトル A_μ によって表わすように，重力粒子を表わす場を，テンソル ($h_{\mu\nu}$) で表わすことにする．ローレンツ共変性を一目瞭然に分かるよう (manifestly covariant) にするためである．ところが，ゼロ質量の粒子に対応する波動関数は，ローレンツ変換に対して，第2図に示したように，面白い変換をする．すなわち，ローレンツ変換と回転を組合わせて，四次元運動量が元にもどるようにする．その時，helicity（スピンの運動量方向の成分）は，ゼロ質量粒子の時は不変であるから，元の状態とまったく同じ状態にもどる．ところが，波動関数は（例として，スピン1の場合）

$$\varphi_\mu^{\pm1}(k)\to\varphi_\mu^{\pm1}(k)+\lambda k_\mu \qquad (2.1)$$

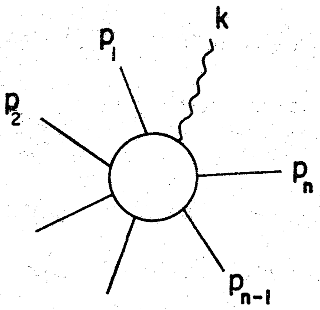
と変化する（±1 は helicity ±1 を表わし，λ は定数)．



$$\varphi_\mu^{+1}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\\0\end{pmatrix}\longrightarrow\varphi_\mu^{+1}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

第2図 ゼロ質量粒子とローレンツ変換 (L. T.)，細い矢印は運動量の方向，太い矢印はスピンの方向を表わす．

3



第3図 重力粒子放出のグラフ．中心の円はブラック・ボックスを表わす．

しかし，これは同じ状態を表わしていなくてはならない．そのためには，観測される物理量は変換 (2.1) に対して不変になっていなければならない．

例として第3図に対して S 行列を

$$S \sim \varphi_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(k) S_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(k, p_1, p_2\cdots) \quad (2.2)$$

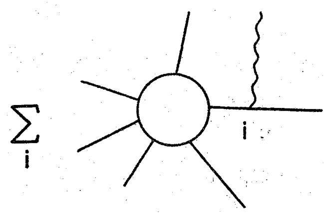
と書く．$\varphi_{\mu_1\cdots\mu_n}$ はスピン n (正確には，helicity $\pm n$) のゼロ質量粒子に対する波動関数．すると，変換 (2.1) と同様の変換に対して不変であるということより

$$k_{\mu_i} S_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(k, p_1, p_2, \cdots) = 0 \quad (2.3)$$

が導かれる．これを S 行列のゲージ不変性と呼ぼう．これは，電磁場の時には，よく知られた関係式である．強調したいのは，この関係式が，ゼロ質量の粒子に対するローレンツ不変性だけから導びかれた点である．質量がゼロかゼロでないかでどうしてこういう違いがあらわれるかというと，ゼロでない場合は，ローレンツ変換によって helicity の異なる状態へ移るが，ゼロの場合は，helicity は変化しないからである．これを少し数学的にいうと，非斉次ローレンツ変換の little group が，ゼロでない場合は 0(3) であり，ゼロの場合は $E(2)$ であるからである．

さて，次に式 (2.3) がいかに強力な条件式であるかを示そう．第3図のようなグラフの S 行列に，条件 (2.3) を課そう．k_μ がゼロになる極限を考えると，第4図のようなグラフが主要な項になる．粒子 i に対する結合定数を g_i とすると，スピン n のゼロ質量の粒子に対して，

$$\sum g_i (p_i)_{\mu_1} \cdots (p_i)_{\mu_{n-1}} = 0 \quad (2.4)$$



第4図 ソフト重力粒子放出のグラフ．

を得る．これより，次のことがいえる．

① 巨視的な場 (すなわち $g_i \neq 0$) はスピン2以下である．

② スピン1 $\cdots\cdots \sum g_i = 0$
スピン2 $\cdots\cdots g_i = g$ (すべての i に対して)

③ スピン2の粒子とディラック粒子の結合には，異常磁気能率 ($g\bar{\psi}\sigma_{\rho[\mu}P_{\nu]}q_\rho\psi\varphi_{\mu\nu}$) および二重極モーメント ($g\bar{\psi}\gamma_5\sigma_{\rho[\mu}P_{\nu]}q_\rho\psi\varphi_{\mu\nu}$) に対応するものは存在しない．

これだけの準備をして，重力粒子のスピンの値の問題にもどろう．上の①より，スピンは 0, 1, 2 のうちのどれかである．* スピン1とすると，電磁場と同じになり，粒子と粒子の間は斥力で，粒子と反粒子の間は引力となり実験事実と合わない．スピン0の場合は，光が太陽のそばを通過するとき屈曲しないことになり，これもだめである．故に，スピンは2である．すると②より，どの物体とも普遍的に結合することが分かり，また③よりディラック粒子との結合に関して，電磁場からの簡単な類推が出来ないことが分かる．

以上のことは，S 行列の存在のみを仮定して導いたものであるが，これ以上話を進めるのには，ラグランジュアンを用いた方が分かりやすい．この場合，S 行列が，(2.1) のような変換に関して不変でなければならないという要請に対応して，ラグランジュアンが

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.5)$$

のようなある種の変換に対して不変でなければならない．

重力粒子の場合，ラングランジュアンが実際どのようになるかを，例をとって考察してみよう．一番簡単な例として，質量をもった物質をスカラー場 φ で表わし，重力粒子の場を $h_{\mu\nu}$ で表わし，その相互作用を考

* 二つ以上の成分の混合と考える方法は後にふれる．

えよう．ラグランジュアンの自由場の部分を，$L(\varphi^2)$ と $L(h^2)$ で表わし，m 次の φ と n 次の h の相互作用の部分を，$L(\varphi^m h^n)$ で表わそう．まず $L(h^2)$ を

$$h_{\mu\nu}(x)\to h_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\Lambda_\nu+\partial_\nu\Lambda_\mu \qquad (2.6)$$

で不変であるように作る.* すると，

$$\partial_\mu\frac{\delta L(h^2)}{\delta h_{\mu\nu}}\equiv 0 \qquad (2.7)$$

になっている．したがって，相互作用の部分全体を L_I とすると，

$$\partial_\mu\frac{\delta L_I(h^2)}{\delta h_{\mu\nu}}=0 \qquad (2.8)$$

でなければならない．これは，電磁場の時の，電流の保存に対応している．結合定数を κ として，(2.8)に矛盾しないようにするためには，

$$L=L(h^2)+L(\varphi^2)+\kappa L(h\varphi^2)+\kappa L(h^3)+\kappa^2L(h^2\varphi^2)$$
$$+\kappa^2L(h^4)+\kappa^3L(h^3\varphi^2)+\cdots \qquad (2.9)$$

と，κ について無限次まで含めなくてはならないことが分かる．電磁場のときに，e の一次か二次で有限のところまでで良かったのと対照的である．この物理的な意味は，(2.8) を満足させる量は，全エネルギー・モーメンタム・テンソルしか存在しないということである．すなわち，別のいい方をすると，まず

$$L=L(\varphi^2)+L(h^2) \qquad (2.10)$$

から出発して，これから導びかれるエネルギー・モーメンタム・テンソル $T^{(0)}_{\mu\nu}$ と結合すると仮定すれば

$$L=L(\varphi^2)+L(h^2)+\kappa h_{\mu\nu}T^{(0)}_{\mu\nu} \qquad (2.11)$$

となるが，このラグランジュアンから導びかれる $T_{\mu\nu}=T^{(0)}_{\mu\nu}+\kappa T^{(1)}_{\mu\nu}$ である．すなわち，$T^{(0)}_{\mu\nu}$ だけでは保存しないのである．そこで，この $T^{(0)}_{\mu\nu}+\kappa T^{(1)}_{\mu\nu}$ と結合するとすると，

$$L=L(\varphi^2)+L(h^2)+\kappa h_{\mu\nu}T^{(0)}_{\mu\nu}+\kappa^2(L(\varphi^2h^2)+L(h^4)) \qquad (2.12)$$

* divergence の形にまとまる項を考慮して不変である．また，変換の仕方に $a\partial_\mu\Lambda_\mu$ (a は任意定数) をつけ加える不定性が存在するが，最終的には同じ理論になる．

····という具合になって，有限のところでは切れないのである．

では，このようにして導びいたラグランジュアンは，どのような変換に対して不変になっているであろうか？ それは，

$$\varphi\to\varphi+\Lambda_\mu\partial_\mu\varphi \qquad (2.13)$$

$$h_{\mu\nu}\to h_{\mu\nu}+\partial_\mu\Lambda_\nu+\partial_\nu\Lambda_\mu+\frac{\kappa}{2}\left(h_{\mu\rho,\nu}-\frac{1}{2}h_{\mu\nu,\rho}\right)\Lambda_\rho \qquad (2.14)$$

という変換に対して不変である．これは群を成しており，よく見てみると，一般座標変換群 ($x\to x'$ への任意の変換) と同型である．これを見るためには

$$g_{\mu\nu}(x)=\delta_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu}(x) \qquad (2.15)$$

とおき，

$$\varphi'(x')=\varphi(x) \qquad (2.16)$$

$$g'_{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}g_{\alpha\beta}(x) \qquad (2.17)$$

と比べてみればすぐに分かる．すなわち重力粒子のときはゲージ不変性が一般座標変換不変性と同型なのである．

ところで，変換 (2.16) と (2.17) に関して不変なラグランジュアンは簡単に求められて，次のようになる．

$$L=-\frac{1}{16\pi G}\sqrt{g}\,R-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial\nu\varphi g^{\mu\nu}+m^2\varphi^2)\sqrt{g} \qquad (2.18)$$

ここで，$g^{\mu\nu}$ は $g_{\alpha\beta}$ の逆行列で，$g=\det|g_{\mu\nu}|$，R はスカラー曲率，前の定数は，後で都合の良いようにとった．ラグランジュアン (2.18) に式 (2.15) を用いて，$h_{\mu\nu}$ で表わすと，まさしく，前のラグランジュアン (2.9) が出てくる ($\kappa^2=32\pi G$)．

ところで，$g_{\mu\nu}$ をメトリック・テンソルであると考えると，式 (2.18) は，アインシュタインの理論のラグランジュアンそのものである．しかし，われわれの方法では，$g_{\mu\nu}(x)=\delta_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu}(x)$ であって，まだメトリック・テンソルとは何の関係もない．この点は，いくら強調しても，強調し過ぎるということはないであろう．このことが，第一節で述べた 1° "幾何の量子化" ではなく 2° のミンコフスキー空間から出発するとい

った意味である．

では，この $g_{\mu\nu}(x)$ はメトリック・テンソルと何の関係もないのであろうか？　否，やはり関係はしているのである．この点に関しては第4節でふれる．

この節に述べてきたことを，簡単に図式的にまとめると，次のようになる．

$$1/r\text{ 法則}\rightarrow\text{ゼロ質量}\xrightarrow[\text{ローレンツ不変性}]{}S\text{ 行列ゲージ}$$

$$\text{不変性}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{スピン}\,2\\ 〃\quad 1\quad\times\ \rightarrow\text{ラグランジュアンのゲー}\\ 〃\quad 0\quad\times\end{array}\right.$$

ジ不変性 → 一般座標変換不変性

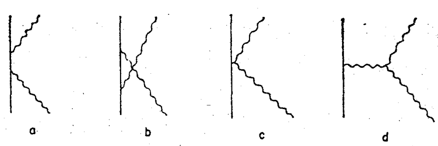
§3.　この理論は無矛盾か？

前の節で，ラグランジュアンを求めたが，量子論は一部分しか用いなかった．では，そのラグランジュアンから，たとえば，S 行列はどうやって求めるのか？

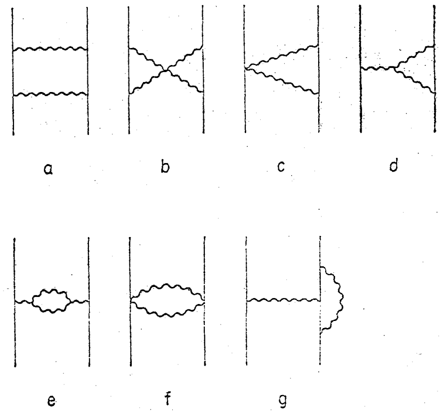
一つは正準形式がある．しかし，重力粒子の独立成分は二つ (helicity ±2) しかないので，独立でない成分を，独立成分で書き表わさなくてはならないし，また，ローレンツ共変性が分かりにくくなり，具体的な計算を行なうのは非常に大変である．そこで，Q. E. D. のときと同じように，ローレンツ不変性がすぐに分かる，ファイマン・グラフによる計算方法を用いることにする．

それぞれの相互作用の項に対応して，頂点 (vertex) を書き，それを伝播関数で結ぶ．独立なグラフをすべて加える．Q. E. D. を含め，かなりの相互作用が，この方法でよいことが分かっている．そこで，量子重力力学 (Q. G. D.) の場合にも，同じ方法で良いと考えるのが自然であろう．

そこで，たとえば，コンプトン散乱に対応する過程を考えてみる．最低次である二次のグラフは，第5図のようになる．d 図のグラフが，Q. E. D. の時になかった図であり，これは，重力粒子が自分自身のエネルギー・モーメンタムとも結合するからである．計算してみると，確かに式 (2.3) のゲージ不変性を満たして



第5図　重力粒子によるコンプトン散乱．



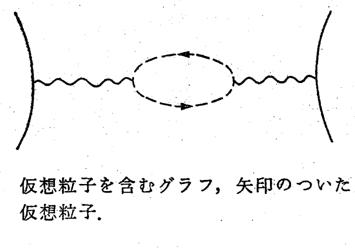
第6図　4次のグラフ．

いるし，何も変なことは起こらない．

第5図のように，閉じたループを含まないグラフを，木の枝 (tree) グラフというが，木の枝グラフである限りすべてうまくいっている．

では次に，第6図のように，ループを含んだグラフ (ループ・グラフ)を考えてみよう．これは第5図を横向きに考えて，粒子と反粒子が消滅して，重力粒子が二つでき，また逆にくり返したようなグラフである．だから，当然，第6図の虚数部分は，第5図と第5図の逆向きの図をかけて，重力粒子の物理状態について足し合わせたものに等しいはずである．ユニタリティー (確率保存) である．ところがである，実際は等しくない．

正しい答は，第6図に第7図を足したものが，4次の粒子—粒子散乱の S 行列なのである．第6図だけではないのである．第7図は，第6図の e とよく似ているが，まん中のループのところが異なり，仮想粒子 (fictitious particle) が現われている．仮想粒子というのは，このように，ループの型でのみ現われて，外線



第7図　仮想粒子を含むグラフ，矢印のついた点線が仮想粒子．

としては現われない，すなわち，観測できない粒子である．であるから，粒子と呼ぶのは，問題であろう．グラフとしては，重力粒子とのみ結合し，その結合の仕方は，スピン1の粒子のようであり，しかもループごとに (-1) の因子が現われるという意味で，フェルミオン的である．

しかし，この仮想粒子は，一貫してローレンツ不変性が明らかな方法をとったから現われたのであって，他の方法を用いればその必要もなくなる可能性もあり，物理的な意味は特に存在しないと思う．この状況は，Q. E. D. のときに，ローレンツ不変性が明らかな形式を用いると，縦光子とスカラー光子が必要になった状況とよく似ている．その時に，縦光子とスカラー光子が実在していないのと同様に，ここに現われた仮想粒子も機能的なものである．

では Q. E. D. と違ってなぜこのようなグラフが必要かというと，重力粒子が自分自身と結合するからであり，数学的にいうと，不変な群が，Q. E. D. のときは Abelian であったが，Q. G. D. の場合は，non-Abelian であるからである．他の相互作用（たとえば，カイラル不変な非線形理論）においても，同様なことが最近分かってきた．

この仮想粒子を含めれば，ループ・グラフにおいても，ユニタリティー，ゲージ不変性および，もちろんローレンツ不変性は満足されている．故に，この理論は，Q. E. D. と同じ位は，無矛盾な理論といえそうである．しかし，発散の問題が残っている．Q. E. D. の時は，くりこみ操作によって，一応逃げることが出来た．しかし，この Q. G. D. は，普通の分類では“くりこみ不可能”な理論に属する．しかし，本当にくりこみ不可能かどうかは，もっと詳しく調べてみないと分からない．この点が，明らかに Q. E. D. と異なる点である．Q. G. D. における発散の問題を解くことによって，他の（たとえば，Q. E. D. の）発散の問題をも解く可能性もあると思われる．このことについては，最後の節にもう一度ふれるつもりである．

§4. 実験を正しく記述するか？

前の二節で創ってきた，粒子物理としての重力理論は，実験と矛盾しないか？ 残念なことに，ニュートン・ポテンシャル以上の理論が必要な実験および観測は，有名な三つの実験，あるいはそれにもう一つ* を加えたもの以外に存在しない．

ニュートン・ポテンシャルの $1/r$ の振舞は，質量ゼロということから，ただちに説明できる．物体の重力質量と慣性質量が比例するという，エトヴェスの実験は，S 行列のゲージ不変性から導かれた②の普遍性によって表わされている．これは，重力粒子が全エネルギー・モーメンタムと結合するということによって保証されている．

残る実験は，普通アインシュタインの理論によって説明されている．われわれの理論は，これらの実験に対して，アインシュタインの理論と同じ答を出すか？その問いにすぐに答えるかわりに，まず，われわれの $g_{\mu\nu}$ と，メトリック・テンソルの関係を調べよう．

簡単化のために，物体は点粒子と考え，古典論の枠で考えよう．場は，ある与えられた c-数である．すると κ の一次までの範囲で

$$L = L_{\text{物体}} + L_{\text{場}} + L_{\text{相互作用}} \tag{4.1}$$

$$L_{\text{物体}} = -m\int ds\,\delta_{\mu\nu}\dot{z}^{\mu}(s)\,\dot{z}^{\nu}(s) \tag{4.2}$$

$$L_{\text{相互作用}} = -m\kappa\int ds\,h_{\mu\nu}(s)\,\dot{z}^{\mu}(s)\,\dot{z}^{\nu}(s) \tag{4.3}$$

となる．(ここで $\dot{z}^{\mu}=(dz^{\mu}/ds)$) 物体の運動を見るために $L_{\text{物}}+L_{\text{相互作用}}$ を考えると，

$$L_{\text{物}} + L_{\text{相}} = -m\int ds\,\dot{z}^{\mu}(s)\,\dot{z}^{\nu}(s)\,g_{\mu\nu}(s) \tag{4.4}$$

$$g_{\mu\nu}(s) = \delta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(s) \tag{4.5}$$

となる．式 (4.4) は，まさしく，メトリック・テンソルが $g_{\mu\nu}$ で与えられたリーマン空間の測地線を運動するということを表わしている．$h_{\mu\nu}$ 自身は，場の方程式からやはり κ の一次までは求められるから，κ の二次までは少なくともアインシュタインの理論と一致する．$\kappa^2=32\pi G$ であるから，G の一次までである．以上は古典論でやったが，量子論でも，同じように計算できる．

スペクトルの赤方変移，および太陽のそばを通過する光の彎曲は，G の一次までで説明できるから，上の

* 4番目のテストといわれているもので，光が太陽のそばを通って，他の天体で反射される時の，時間の遅れを測る．

理由により，アインシュタインの理論と同じ答を出す．

しかし，木星の近日点移動を説明するには，理論の G^2 の項までが必要である．アインシュタインの理論の非線形な性質に本質的に依存するので，これはその理論の験証として一番重要な意味をもっていた．座標系を遠方で平らに（ミンコフスキー空間に）なるようにとると，アインシュタインの理論から導びかれるハミルトニアンは

$$H=\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8c^2m^3}-\frac{GmM}{r}-\frac{3GMp^2}{2c^2mr}+\frac{G^2mM^2}{2c^2r^2} \tag{4.6}$$

となる．また，これを二体問題に拡張した，アインシュタイン・インフェルト・ホッフマンの仕事があり，それに対応するハミルトニアンは

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}\left(\frac{p_1{}^2}{m_1}+\frac{p_2{}^2}{m_2}\right)-\frac{1}{8c^2}\left(\frac{p_1{}^4}{m_1{}^3}+\frac{p_2{}^4}{m_2{}^3}\right)-\frac{Gm_1m_2}{r}\\&-\frac{Gm_1m_2}{2c^2r}\left[3\left(\left(\frac{p_1}{m_1}\right)^2+\left(\frac{p_2}{m_2}\right)^2\right)-\frac{7p_1p_2}{m_1m_2}-\frac{(p_1r)(p_2r)}{m_1m_2r^2}\right]\\&+\frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}\end{aligned} \tag{4.7}$$

である．

ところで $G\sim\kappa^2$, $G^2\sim\kappa^4$ であるから，G の一次の部分は第1図のグラフからの寄与に相当するが，G の二次の部分は第6図のグラフからの寄与に相当する．第1図のようにループを含まないグラフは問題ないが，第6図のようなループ・グラフは，発散積分を含むグラフであり，前に述べたように Q. G. D. はいわゆる“くりこみ不可能”な理論であるので，本当に意味のある答を見い出せるのかがまず問題である．

一般に，ニュートン・ポテンシャルに対する摂動の効果は，近日点の移動量で表わされているが，エネルギーのずれでも表わされ，水星の場合 $\Delta E/E\sim10^{-8}$ である．低次のファイマン・グラフに対する高次の補正という意味では，一種の“ラム・シフト”といってもよいであろう．

また，電磁相互作用のときは，古典的に知られている遅延クーロン・ポテンシャルは，第1図のみから導かれることもあって，古典的な物理量に対するグラフは，一般的に，ループを含まないグラフであるとまちがって思われている節もあるので，その点をはっきりさせる必要もある．さらに問題なのは，第一節に述べたように，Dicke-Goldenberg の実験が正しいとすると，アインシュタインの理論は正しくないことになるのだが，この理論による計算でその実験を説明できるかどうかということもある．

以上の理由により，水星の近日点の移動を量子論で調べてみることにする．これは，場の量子論で計算して，$\hbar\to0$ とすれば，それに対応する古典論の結果と一致するか？　という問題の一つである．量子力学の場合には，一致することが証明されているが，場の量子論の場合には，はっきりしたことは分かっていない．特に発散の問題が未解決なので，形式的なことだけでは片付かない面をもっている．

さて，第6図のグラフから具体的にポテンシャルを導いてみよう．発散する積分を含む量からわれわれが求めようとしているポテンシャルを抜き出すと，赤外発散も，紫外発散もそこには現われないことがわかる．これは，“くりこみ不可能”にも拘わらず，高次の量に関しても，意味ある物理量を与える一例という意味で重要である．長い計算の後に，第1図からの寄与を足して，式 (4.6) と (4.7) と同じハミルトニアンを得る．すなわち，アインシュタインの理論と同じ答を得る．故に，Dicke-Goldenberg の実験は説明できない．

では，われわれの理論は，いつでも，アインシュタインの理論と同じであろうか？　否，少なくとも，プランク定数 $\hbar$ がきく過程に対しては，われわれの理論は異なる答を与えるが，残念ながら，そのような実験が存在しないし，しばらくは行なえそうにない．

§5.　まとめとコメント

まず，いままでのことを簡単にまとめてみよう．重力を幾何学ととらえるアインシュタインの理論から離れて，重力を他の相互作用と同じように，粒子物理（場の理論）によって理解しようということが最初の出発点であった．その立場で，理論を作っていくと，ほとんど唯一の解として，スピン2の重力粒子理論に導かれた．次にその理論の無矛盾性を調べ，Q. E. D. の時と異なり，ファイマン・グラフに仮想 (fictitious) 粒子の寄与を含めなくてはならないが，他は発散の問題を除いて，すべてうまくいっていることが分かった．さらに，その理論は，有名な三つの実験に対しては，アインシュタインの理論と同じ結論を出すこと，特に

水星の近日点移動に対しては，ループ・グラフが寄与し，“くりこみ不可能”にも拘わらず，有限の答を得ることができた．これが，アインシュタインと同じであることは，Dicke-Goldenberg の太陽の扁平度の観測を説明できないということである．実験がまちがっているのか，それとも，理論が正しくないのか，どちらであろう？

この点に関連して，上に“ほとんど唯一の解として”という点を，もう少し吟味してみよう．第2節で，ゲージ不変性から，スピン 0，1，2 のみ許されることを導いた．次に，その中の“一つ”だけであることを仮定すると，唯一の解として，スピン2になったのである．では，たとえば，スピン2に少しスピン0がまじった理論（スカラー・テンソル理論）はどうであろうか？ 理論の美しさからいえば，あまり魅力的でないし，まぜ合わせ方の任意定数を一つ含むことも不満足であるが，調べてみよう．

すると，量子化しない古典論である限り，数％のスカラー成分を含む理論は，現在の実験の精度では除去できないことが分かる．特に Dicke-Goldenberg の実験が正しいとすると，スカラー・テンソル理論がこの点に関しては，正しいことになる．しかし，最近，他の実験の精度が上がってきて，どちらかといえば，スカラー成分を含まない方が好ましい結果が出始めている(たとえば，地球一金星間の電波の往復時間の測定)．

この点を，量子論で考えるとどうなるか？ 古典論で無矛盾であっても，量子化しても矛盾しないとは限らないのである．この場合の問題点の一つは，スカラー成分の“くりこまれた”質量がゼロになる保証が理論の中に存在しない点である．もう一つは，このスカラー・テンソル理論を量子化すると，摂動論が正しいとする限り，ある種のユニタリティーと矛盾してしまうのである．われわれは“すべての物理現象は量子論でも記述できる”ということを大前提としているので，スカラー・テンソル理論は失格である．他の可能性を考えても，もっともと思える仮定のもとでは，スピン2の重力粒子理論以外にはありえない．故に，量子論の立場で Dicke-Goldenberg の実験は説明できない．是非，実験をもう一度やり直してほしいところである．

話をもとに戻して，テンソル（スピン2）理論では，紫外発散の問題は解決していないのであるが，赤外発散の問題は，Q. E. D. のときとほとんど同じように処理できることが分かっている．ところが，テンソル重力理論と数学的構造は非常に似ていて，かつ，より簡単な，ゼロ質量の Yang-Mills 場の量子論において，赤外発散の問題は，少なくとも，同じ方法では解決できなく，たぶん，他の方法でも解決できないのではないかと思う．

このように，スカラー・テンソル理論であるとか，ゼロ質量の Yang-Mills 場理論は，うまく量子化できず，実在すると思われる Q. E. D. とか Q. G. D. が，うまく量子化できる（発散の問題はまだ未解決）のは，非常に面白い．

では，これからの問題点はなんであろうか？ 一つは，古くからいわれている，重力が他の相互作用（Q. E. D. 等）の発散の自然の切断になっているのではないかという予想であろう．このためにも，重力を他の相互作用と同じ形式で再構築しなければならなかったのである．電子の電磁相互作用による自己質量に対して重力相互作用を含めることによって，有限な値を得たという仕事もあるが，まだ，はっきりした結論はでていない．重力理論の“くりこみ不可能”ということも合わせて問題になるはずである．

もう一つは，天体関係のことである．宇宙スケールでは，地上で実現できないような極限状態が実現されている可能性がある．たとえば，最近いわれているブラック・ホールなどである．一般に，これらの問題は現在まで，古典論のアインシュタインの理論の枠で考えられている．われわれの量子論で考えたら，どうなるのかというのも興味ある問題である．われわれの方法は，摂動論であるので，そのような特異的な振舞を見るためには，無限の次数まで足し合わせなくてはならない．その場合，量子的効果によって質的に新しいことが起こるかという点は非常に重要な問題である．

最後に，位田先生に原稿を読んで頂き，有益なコメントを頂いた点に，感謝の意を表したい．

文　献

途中の細かい計算を省略したところがあるので，その点等を詳しく知りたい方に，文献をいくつか挙げておきたい．

1) S. N. Gupta: Proc. Phys. Soc. (London) **A 65** (1952) 161, 608.

113

2) R. P. Feynman: Acta Phys. Polon. **24** (1963) 697.
3) B. S. DeWitt: Phys. Rev. **162** (1967) 1195, 1239.
4) W. E. Thirring: Ann. Phys. **16** (1961) 96.
5) S. Weinberg: Phys. Rev. **138** (1965) B 988.
6) Y. Iwasaki: Progr. theor. Phys. **46** (1971) 1586.