数理解析研究所講究録
第 168 巻 1972 年 125-129

実解析函数の一つの特徴づけ

東大理　金子 晃

この稿では一年前のシンポジウムで予告した次の定理の証明を与える。記号はおおむね [1] と同一である。

定理1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$u \in \mathcal{B}(\Omega)$ とする。このときもし任意の局所作用素 $J(D)$ に対し $J(D)u$ が Ω で連続函数となるならば実は $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ である。(ここに $J(D)u$ はもちろん超函数の意味での作用である。)

定義2. $K \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトとする。記号 $\mathcal{A}_g(K)$ で $\mathcal{A}(K)$ に次のセミノルムたちにより定まる位相を付与したものを表わす。

$$\|f\|_J = \sup_{x \in K} |J(D)f(x)|$$

ここに $f \in \mathcal{A}(K)$ であり，J としてはすべての局所作用素がとられる。

系3. $\mathcal{A}(K) \simeq \mathcal{A}_g(K)$. (容易)

系4. $K = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ に対しては

$$\mathfrak{A}_g(K) \succ \sigma(\mathfrak{A}(K),\ \mathcal{B}[K]).$$

命題5. $\mathfrak{A}_g(K) \hookrightarrow \mathfrak{A}(K)$ は列的連続であり，$\mathfrak{A}_g(K)$ は列的完備。

これらは[1]定理1.2，系1.3，系2.2等を見よ。

定理6. u を $\mathbb{R}^1$ の原点における超函数の芽とする。任意の局所作用素 $J(D)$ に対し，$J(D)u$ が原点において連続函数の芽を定めるとすれば実は u は原点に実解析函数の芽を定める。

証明. u の定義函数 $F(z)$ をとる。$f_k(x)=F(x+\frac{i}{k})-F(x-\frac{i}{k})$ とおく。$J(D)u$ は原点で連続だから実解析函数 $J(D)f_k(x)=(J(D)F)(x+\frac{i}{k})-(J(D)F)(x-\frac{i}{k})$ は原点の近傍で一様に $J(D)u$ に収束する（ポアソン核の初等的理論！）。これより $\{f_k\}$ は $\mathfrak{A}_g(\{0\})$ におけるコーシー列であることがわかる（上の定義を見よ）。故に命題により $f_k \longrightarrow {}^{\exists}f \in \mathfrak{A}(\{0\})$。この収束は原点のある近傍で一様である。一方初めから原点のある(実)近傍で一様に $f_k \longrightarrow u$ であったから，$u=f$，すなわち $u \in \mathfrak{A}(\{0\})$.

q.e.d.

注意. これにより[2]の終わりのRemarkは不要である。ただし多変数のときはこううまく行くかどうか知らない。

定理1の証明

仮定により $u\in C^\infty(\Omega)$ としてよい。多重円柱 $K_1\times\cdots\times K_n$ を任意にとる。定理6により $x_m^0\in K_m$ $(m\neq j)$ を任意に止めたとき $u_{(j)}(x_j;x'^0)=u(x_1^0,\cdots,x_{j-1}^0,x_j,x_{j+1}^0,\cdots,x_n^0)$ は x_j につき実解析的となる。以下 $u_{(j)}(x_j;x'^0)$ の x_j に関する正則域がパラメタ x'^0 について共通にとれることを示そう。

$$U=\{u_{(j)}(x_j;x'^0);\ x'^0\in\prod_{m\neq j}K_m\}$$

は $\mathcal{O}_g(K_j)$ の有界集合であることが定義より直ちにわかる。$K_j\subset\mathbb{R}^1$ に系4を用いて U が $\mathcal{O}(K_j)$ の強有界集合なことがわかる。故に，良く知られているようにある複素近傍 $V_j\supset K_j$ が存在して $U\subset\mathcal{O}(V_j)$ となる。つまり $u_{(j)}(x_j;x'^0)$ は必ず V_j で正則である。

次に標準定義函数

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{K_1}\cdots\int_{K_n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{z_j-x_j}\right)u(x)\,dx_1\cdots dx_n$$

を考える。u は C^∞ 級だから古典的議論で $\Phi_n(z)$ が $\prod_{j=1}^{n}(V_j\setminus K_j)$ で正則，かつ連続な境界値 $\Phi_n(x\pm i0)$ を持つこと，及び $u(x)$ がこれらの境界値の適当な符号を付した和に等しいことが知られる。さて，z_m，$(m\neq j)$ をとめたとき Φ_n は z_j につき $V_j\setminus K_j$ に正則に拡張できる。何故ならすでに述べた様に積分

$$\int_{\prod_{m\neq j} K_m} \prod_{m\neq j} \left(\frac{1}{z_m - x_m}\right) u_{(j)}(x_j ; x')\, dx'$$

は $x_j \in V_j$ に対し広義一様に収束するからである。故に積分路 K_j を端点 ∂K_j を固定したまま V_j の中で動かすことができるのである。

さて Φ_n は領域

$$\bigcup_{j=1}^{n} \{(V_j \setminus \partial K_j) \times \prod_{m\neq j} (V_m \setminus K_m)\}$$

で多価正則なことが示された。一方局所化されたボホナーの定理（[3] Lemma 2.5.1 又は [4] を見よ）によれば次の形の集合

$$\bigcup_{j=1}^{n} \{(V_j \setminus \mathring{K}_j) \times \prod_{m\neq j} V_m^{\sigma_m}\}$$

の正則包は $\mathring{K}$ のある複素近傍 W^σ を含む。*) ここに $V_j^{\sigma_j} = V_j \cap \{\sigma_j \operatorname{Im} z_j > 0\}$. 故に符号 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ をいろいろに変えることにより結局 $\Phi_n(z)$ の各分枝は $\mathring{K}$ まで正則にのびることがわかった。故にそれらの境界値の代数和である u は $\mathring{K}$ 上実解析的である。$K \subset \Omega$ は任意であったから証明は終わった。

注意. 各 $J(D)u$ が連続という仮定は，各 $J(D)u$ が C^∞，又は各 $J(D)u$ が distribution，又は各 $J(D)u$

*) マルグランジュ＝ザーナーの定理として知られているものである。今はむずかしい評価はどうでも良い。

が ultradistrubution 等々としても同じ結論をもたらす。それは適当な楕円型局所作用素で正則化してみれば直ちにわかる。

応用としては超函数の範囲で安定な問題が連続性を伝播させるとき，解析性も全く同様に伝播することが何も評価せずにわかることなど。なお中国のシューという人が，ultradistributionの位相的理論を用いて同様の結果を出していることを注意しておく。

文　　献

[1] 金子. hyperfunction の measure による表現について，数理解析講究録 145, P.P. 92−108.

[2] 〃. A new cheracterization of real analytic functions, Proc. Japan Acad. 47 (1971), 774−775.

[3] Hörmander. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand 1966.

[4] 小松. A local version of Rochner's tube theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA, 19 (1972) 201−214.