数理解析研究所講究録
第169巻 1972年 145-156

$H^\infty(m)$ の w^* maximality について

和歌山大 教育　貴志 一男

§1. 序

A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra, $\mathcal{M}(A)$ を A の maximal ideal space とする。いま $m \in \mathcal{M}(A)$ の表現測度は unique (これをまた m で表わす), m を含む Gleason part $P(m)$ は nontrivial ($P(m) \supsetneqq \{m\}$) であるとする。また A の $L^\infty(m)$ w^* closure を $H^\infty(m)$ で表わす。

§3 では $H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal でないときの $H^\infty(m)$, $\mathcal{M}(H^\infty(m))$ の二, 三の性質 (定理 A, B), §4 では $H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal である条件 (定理 C. 特に, $H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal である必要十分条件は $f \in H^\infty(m)$, $f \neq 0$ のときは $\int \log|f|\,dm > -\infty$ である) を述べる。

§2. 準備

X を compact Hausdorff space，A を X 上の uniform algebra，$\mathcal{M}(A)$ を A の maximal ideal space とする。$m \in \mathcal{M}(A)$ の表現測度は unique（これもまた m で表わす），A の $L^p(m)$ norm closure（$p=\infty$ のときは w^* closure）を $H^p(m)$ と書く。$H^\infty(m)$ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ を $L^\infty(m)$ の maximal ideal space $\tilde{X}$ 上に制限したとき，これを $\tilde{H}^\infty$ で表わす。$\tilde{H}^\infty$ は $\tilde{X}$ 上で logmodular algebra である。すなわち $L^\infty_R = \log|(H^\infty)^{-1}|$ または $C_R(\tilde{X}) = \log|(\tilde{H}^\infty)^{-1}|$ である。

$f \in H^p(m)$，$\int \log|f|\,dm = \log\left|\int f\,dm\right| > -\infty$ なる関数を outer，$f \in H^p(m)$，$|f|=1$ a.e. (m) なる関数を inner という。以下では，m を含む Gleason part $P = P(m)$ は

$$P(m) \supsetneq \{m\}$$

とする。$\varphi \in P(m)$ の表現測度も unique であるのでこれを $d\varphi$ で示すことにする。$m \in \mathcal{M}(H^\infty(m))$ を含む Gleason

$\tilde{m}(\tilde{f}) = \int f\,dm$ $(\forall f \in H^\infty(m))$ とおくと $\tilde{m} \in \mathcal{M}(\tilde{H}^\infty)$ である。

part を $\mathcal{P} = \mathcal{P}(m)$ で示すと $\mathcal{P}$ も nontrivial である。よって $\tilde{X}$ 上に $\tilde{m}$ を表現する測度が一意的にきまる。これをまた $\tilde{m}$ で示す，すなわち $\tilde{m}(\tilde{f}) = \int_{\tilde{X}} \tilde{f}\,d\tilde{m} = \int_X f\,dm = m(f)$．

$f \in H^p(m)$ に対して $\hat{f}(\varphi) = \int f\,d\varphi$ $(\forall \varphi \in P(m))$ とおく。

「定理（Wermer）　$P(m) \supsetneq \{m\}$ とすると次の性質をもつ

inner function Z が存在する.

1) $Z H^2(m) = H^2_m$, $H^2_m = \{ f \in H^2(m) ; \int f \, dm = 0 \}$.

2) $\hat{Z}$ は P を $\Delta = \{ \lambda ; |\lambda| < 1 \}$ 上へ 1対1 に写像し, $\hat{Z}^{-1}$ は (w^*-) continuous である.

3) $f \in H^2(m)$ のとき, $\hat{f}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (\forall \varphi \in P(m))$
$\lambda = \hat{z}(\varphi)$, $a_n = \int \bar{Z}^n f \, dm$. ∎

Z についての多項式の $L^p(m)$-norm closure を $\mathcal{H}^p$, Z と $\bar{Z}$ についての多項式の $L^p(m)$-norm closure を $\mathcal{L}^p$ で示す ($p = \infty$ のときは w^* closure).

$$H^p = \mathcal{H}^p \oplus I^p, \quad I^p = \{ f \in H^p(m) ; \int \bar{Z}^n f \, dm = 0, n = 0, 1, 2, \cdots \}$$

$$L^p = \mathcal{L}^p \oplus N^p, \quad N^p = \{ f \in L^p(m) ; \int Z^n f \, dm = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \}$$

($\oplus$ は algebraic direct sum を示す)

(1.1) $\quad f \in I^p \Leftrightarrow \bar{Z}^n f \in I^p \ (n \geq 1) \Leftrightarrow \varphi(f) = \int f \, d\varphi = 0 \ (\forall \varphi \in P)$

N^p は $I^p + \bar{I}^p$ の $L^p(m)$ norm closure である.

$\mathcal{H}^p \cap L^\infty = \mathcal{H}^\infty$, $I^p \cap L^\infty = I^\infty$ 等々 (cf. [6])

$d\theta$ を複素平面の単位円周 $\{|\lambda| = 1\}$ 上の normalized Lebesgue measure, $H^p(d\theta)$ を classical Hardy space とする. 写像

(1.2) $\quad T : Z \rightarrow e^{i\theta}$

は $\mathcal{L}^p$ から $L^p(d\theta)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 上への isometrically isomorphism に拡張出来る. この T は $\mathcal{H}^p$ を $H^p(d\theta)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 上に

isometrically isomorphic に写す．この際 $T\bar{f}=\overline{Tf}$，$f\in\mathcal{L}^p$（$\bar{f}$ は f の complex conjugate）である。$p=\infty$ のときは T は $\mathcal{H}^\infty$（または $\mathcal{L}^\infty$）から $H^\infty(d\theta)$（または $L^\infty(d\theta)$）上への algebra isomorphism である．従って T の adjoint map T^* は $\mathcal{M}(H^\infty(d\theta))$（または $\mathcal{M}(L^\infty(d\theta))$）を $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$（または $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$）に homeomorphic に写す．$\mathcal{P}|\mathcal{H}^\infty$ は $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ における nontrivial Gleason part であり，容易に解るように，$(T^*)^{-1}(\mathcal{P}|\mathcal{H}^\infty)=D$，ただし D は複素平面上の単位開円板で $D\subset\mathcal{M}(H^\infty(d\theta))$ と考えたものである．$\overline{D}=\mathcal{M}(H^\infty(d\theta))$，$(T^*)^{-1}(\overline{\mathcal{P}|\mathcal{H}^\infty})=\overline{D}$ であるから

(1.3) $$\overline{\mathcal{P}|\mathcal{H}^\infty}=\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$$

$(T^*)^{-1}(ch(\mathcal{H}^\infty))=ch(H^\infty(d\theta))=\partial(H^\infty(d\theta))=\mathcal{M}(L^\infty(d\theta))$ から

(1.4) $$ch(\mathcal{H}^\infty)=\partial(\mathcal{H}^\infty)=\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty).$$

（uniform algebra A の Choquet boundary を $ch\,A$，Šilov boundary を ∂A で示す.）次の事柄も容易に解る.

(1.5) $\partial\mathcal{H}^\infty=\{\varphi\in\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty);\ |\varphi(h)|=1$ for every inner function h in $\mathcal{H}^\infty\}$

(1.6) $\mathcal{L}_R^\infty=\log|(\mathcal{H}^\infty)^{-1}|$，$C_R(\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty))=\log|(\hat{\mathcal{H}}^\infty)^{-1}|$

§3. $H^\infty(m)$，$\mathcal{M}(H^\infty(m))$ のある性質

補題 3.1 $\mathcal{L}^\infty\cdot I^\infty=I^\infty$

証明　$f\in I^\infty$ のとき $\bar{Z}^n f\in I^\infty$ $(n\geq 1)$．$g=\sum_{n=0}^{\infty}a_n Z^n\in\mathcal{H}^2$

に対して $\int |f\bar{g} - \sum_{n=0}^{k} \bar{a}_n \bar{Z}^n f|^2 dm \le \|f\|_\infty \int |g - \sum_{n=0}^{k} a_n Z^n|^2 dm \to 0$ $(k \to \infty)$. $\therefore$ $\bar{\mathcal{H}}^2 \cdot I^\infty \subseteq I^2$. また $\mathcal{H}^2_m \cdot I^\infty \subseteq I^2$ であるから $\mathcal{L}^2 \cdot I^\infty \subseteq I^2$ ($\because$ $\mathcal{L}^2 = \bar{\mathcal{H}}^2 \oplus \mathcal{H}^2_m$) $\therefore$ $\mathcal{L}^\infty \cdot I^\infty \subseteq I^\infty$ $\therefore$ $\mathcal{L}^\infty I^\infty = I^\infty$.

Q.E.D.

定理 A. 1) H^∞/I^∞ と $\mathcal{H}^\infty$ は Banach algebra として同型である ($H^\infty/I^\infty \cong \mathcal{H}^\infty$).

2) hull $I^\infty = \mathfrak{F} = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ (同一視出来る), また $\hat{\mathcal{H}}^\infty \subset \hat{H}^\infty(m)$ と考えたときの $\hat{\mathcal{H}}^\infty|\mathfrak{F}$ は $C(\mathfrak{F})$ の uniform algebra で $ch(\hat{\mathcal{H}}^\infty|\mathfrak{F}) = \partial(\hat{\mathcal{H}}^\infty|\mathfrak{F}) = \{\varphi \in \mathfrak{F}\ ;\ |\varphi(h)| = 1$ for every inner function h in $\mathcal{H}^\infty\} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ ($= \tilde{Y}$ とおく), $C_R(\tilde{Y}) = \log|(\hat{\mathcal{H}}^\infty)^{-1}|\tilde{Y}|$ また $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) = \mathcal{M}(L^\infty)|\mathcal{L}^\infty$, 従って $\tilde{x}$ $(\in \tilde{X} = \mathcal{M}(L^\infty))$ に $\tilde{x}|\mathcal{L}^\infty$ を対応さす写像を π とすると, π は $\mathcal{M}(L^\infty)$ から $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ 上への連続写像である。

3) $\mathcal{M}(H^\infty) - \mathfrak{F} \ni \varphi$ ならば $\varphi|\mathcal{H}^\infty \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ である。

証明. 1) $\forall f \in H^\infty(m)$, $f = g + h$ ($g \in \mathcal{H}^\infty$, $h \in I^\infty$) とすると, Lemma 3.1 から $f^n = g^n + h_n$, $g^n \in \mathcal{H}^\infty$, $h_n \in I^\infty$.

$\therefore \int |f|^{2n} dm = \int |g|^{2n} dm + \int |h_n|^2 dm \geqq \int |g|^{2n} dm$

$\therefore \left(\int |f|^{2n} dm\right)^{1/2n} \geqq \left(\int |g|^{2n}\right)^{1/2n}$. $n \to \infty$ とすると $\|f\|_\infty \geqq \|g\|_\infty$.

従って H^∞ から H^∞/I^∞ の上への自然写像によって, $g \in \mathcal{H}^\infty$ に $\bar{g} = g + I^\infty \in H^\infty/I^\infty$ が対応したとすると,

$$\|\tilde{g}\|_\infty = \inf\{\|g+h\| ; h \in I^\infty\} = \|g\|_\infty$$

$H^\infty = \mathscr{H}^\infty \oplus I^\infty$ であったから $H^\infty/I^\infty \cong \mathscr{H}^\infty$.

2) $H^\infty/I^\infty \cong \mathscr{H}^\infty$, $\mathcal{M}(H^\infty/I^\infty) = \text{hull}\, I^\infty = \{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty) ; \varphi(h) = 0$ for all $h \in I^\infty\}$ から hull $I^\infty = \mathcal{M}(\mathscr{H}^\infty)$. 即ち hull I^∞ から $\mathcal{M}(\mathscr{H}^\infty)$ 上への homeomorphic な mapping Σ が存在するのであるが $\overline{\mathfrak{S}|\mathscr{H}^\infty} = \mathcal{M}(\mathscr{H}^\infty)$ ((1.3)式) で $\mathfrak{S} \subseteq \text{hull}\, I^\infty$ であるから $\mathfrak{S} = \Sigma^{-1}(\overline{\mathfrak{S}|\mathscr{H}^\infty}) = \Sigma^{-1}\mathcal{M}(\mathscr{H}^\infty)$ $\therefore$ $\mathfrak{S} = \mathcal{M}(\mathscr{H}^\infty)$.

(注. $\Phi \in \text{hull}\, I^\infty$, $\Sigma\Phi = \varphi \in \mathcal{M}(\mathscr{H}^\infty)$ とすると $\Phi(g) = \varphi(g)$ for $\forall g \in \mathscr{H}^\infty$). 従って $\hat{\mathscr{H}}^\infty \subset \hat{H}^\infty(m)$ と考えたとき $\hat{\mathscr{H}}^\infty|\mathfrak{S}$ と $\mathscr{H}^\infty$ の Gelfand 表現した $\hat{\mathscr{H}}^\infty$ (on $\mathcal{M}(\mathscr{H}^\infty)$) とは同一のものと考えられる. 故に $\hat{\mathscr{H}}^\infty|\mathfrak{S}$ は $C(\mathfrak{S})$ の uniform algebra である. (1.4), (1.5) 式から $ch(\hat{\mathscr{H}}^\infty|\mathfrak{S}) = \partial(\mathscr{H}^\infty|\mathfrak{S}) = \{\varphi \in \mathfrak{S} ; |\varphi(h)| = 1$ for all inner function h in $\mathscr{H}^\infty\} = \Sigma^{-1}\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$, (1.6) から $C_R(\tilde{\Gamma}) = \overline{\log|(\mathscr{H}^\infty|\mathfrak{S})^{-1}|}$. 次に $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) = \mathcal{M}(L^\infty)|\mathcal{L}^\infty$ を示す. いま $\mathcal{E}$ を $\mathcal{L}^\infty$ の L^∞ への Embedding mapping, $\mathcal{E}^*$ を $\mathcal{E}$ の adjoint mapping とする. $\mathcal{E}^*$ は $K_{(L^\infty)^*} = \{\varphi \in (L^\infty)^* ; \varphi(1) = \|\varphi\| = 1\}$ を $K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \{\varphi \in (\mathcal{L}^\infty)^* ; \varphi(1) = \|\varphi\| = 1\}$ 上へ map する (Hahn-Banach theorem を使う) このとき

$$\mathcal{E}^*\, \text{ext}\, K_{(L^\infty)^*} \supseteq \text{ext}\, K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} \qquad ([1],\ p. 318)$$

Bauer の定理 ([1], p. 315) によって ext $K_{(L^\infty)^*} = \mathcal{M}(L^\infty)$, ext $K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$. 故に $\mathcal{E}^*\mathcal{M}(L^\infty) \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$.

$\therefore \mathcal{M}(L^\infty)|_{\mathcal{L}^\infty} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$. また $\mathcal{M}(L^\infty)|_{\mathcal{L}^\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ が成り立つから $\mathcal{M}(L^\infty)|_{\mathcal{L}^\infty} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$.

3) $\forall \varphi \in \mathcal{M}(I^\infty)$ ならば $\varphi(h)=1$ $(\exists h \in I^\infty)$. いま $\Phi(f)=\varphi(fh)$ $(\forall f \in H^\infty)$ とおくと $\Phi(1)=1$ で $\Phi(fg)=\Phi(f)\Phi(g)$ $(\forall f, g \in H^\infty(m))$ $\therefore \Phi \in \mathcal{M}(H^\infty(m)) - \mathfrak{F}$. 対応 $\varphi \to \Phi$ によって $\mathcal{M}(I^\infty)$ と $\mathcal{M}(H^\infty) - \mathfrak{F}$ とは homeomorphic になる. $\mathcal{L}^\infty \cdot I^\infty = I^\infty$ (補題3.1) であったから $\forall f, g \in \mathcal{L}^\infty$ に対して $\Phi(fg)=\Phi(f)\Phi(g)$. 即ち $\Phi|_{\mathcal{H}^\infty} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ となる ($\Phi|_{\mathcal{H}^\infty}$ は $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ に拡張出来る).

補題 3.2. C を Banach space, S, T を C^* の w^* closed subspace とする. 若しある定数 $k\,(>0)$ が存在して

$$\|u\| + \|v\| \leq k \|u+v\| \quad (\forall u \in S, \ \forall v \in T)$$

となるとき, $S+T$ は C^* の w^* closed subspace である. (例えば, G. M. Leibowitz: Lectures on complex function algebras, Scott, Foresman, p. 203 を参照.)

定理 B. $I^\infty \supsetneqq \{0\}$ のとき, $\mathcal{M}(I^\infty)$ は disconnected である.

証明. いま $\mathcal{L}^\infty \oplus I^\infty = B$ とおく. このとき $B \ni \forall f$ $f = g + h$ $(g \in \mathcal{L}^\infty, h \in I^\infty)$ に対して定理A-1) の証明と同様に $\|g\| \leq \|f\|$, 従って $\|h\| \leq 2\|f\|$ $\therefore \|g\| + \|h\| \leq 3\|f\|$ が得られ, 補題3.2 から B は w^* closed 従って

Banach algebra になる。また B/I^∞ と $\mathcal{L}^\infty$ は Banach algebra として同型である。よって $M(\mathcal{L}^\infty) = \mathrm{hull}(I^\infty)$ で $M(B) - \mathrm{hull}\, I^\infty$ と $M(I^\infty)$ とは homeomorphic である。

$H^\infty(m)$ に属する inner function f で

$$(3.1) \qquad f = g + h \quad (g \in \mathcal{H}^\infty,\ h \in I^\infty),\quad h \neq 0$$

となるものが存在する。(∵) 若し存在しなければ、[2] によって $L^\infty = \mathcal{L}^\infty$ となり、$I^\infty \supsetneqq \{0\}$ に反する)。　このとき、

$$\left(\int |g|\, dm\right)^2 \le \int |g|^2 dm < \int |g|^2 dm + \int |h|^2 dm = 1$$

より $\int |g|\, dm < 1$。また $|g| \le \|g\|_\infty \le \|f\|_\infty = 1$。この関係を $\tilde{X}$ に移すと、$\int |\tilde{g}|\, d\tilde{m} < 1$ で $|\tilde{g}| \le 1$。従って $\tilde{E} = \{\tilde{x} \in \tilde{X};\ |\tilde{g}(\tilde{x})| < 1\}$ は空集合ではない。$\forall \tilde{x} \in \tilde{E}$ に対して $\pi \tilde{x} = \varphi \in M(\mathcal{L}^\infty)$ とおくと、$M(\mathcal{L}^\infty) = \mathrm{hull}\, I^\infty$ であるから $\varphi(f) = \varphi(g) = \tilde{x}(g)$ で $|\varphi(f)| < 1$。$\{\varphi;\ \varphi \in M(\mathcal{L}^\infty),\ |\varphi(f)| < 1\} = U$ とおくと、U は $M(\mathcal{L}^\infty)$ 上の空でない open set である。また U の任意の要素 φ をとり、$\pi^{-1}\varphi \ni \tilde{x}$ とすると、$\varphi(f) = \varphi(g) = \tilde{x}(g)$ から $|\tilde{x}(g)| < 1$。故に $|\tilde{x}(h)| \ge |\tilde{x}(f)| - |\tilde{x}(g)| = 1 - |\tilde{x}(g)| > 0$ となり $\tilde{x} \notin M(\mathcal{L}^\infty)$。∴ $\pi^{-1} U \cap M(\mathcal{L}^\infty) =$ 空。また $U \supsetneqq V$ なる clopen set V がとれる。(∵) $M(\mathcal{L}^\infty)$ と $M(L^\infty(d\theta))$ とは homeomorphic であるから) そうすると、$\chi^2 = \chi \in \mathcal{L}^\infty$ となる関数 χ が存在して

$V = \{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty):\ \varphi(\chi) = 1\}$. いま，$X_1 = \{\varphi \in \mathcal{M}(B);\ \varphi(\chi) = 1\}$，$X_2 = \{\varphi \in \mathcal{M}(B);\ \varphi(\chi) = 0\}$ とおくと，X_1，X_2 は何れも $\mathcal{M}(B)$ における空でない clopen set で

$$\mathcal{M}(B) = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = \text{空}.$$

$$\therefore\ \mathcal{M}(B) - \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) = (X_1 - \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)) \cup (X_2 - \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)).$$

$\mathcal{M}(B) - \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$ から $\mathcal{M}(I^\infty)$ 上への homeomorphic map によって

$\mathcal{M}(I^\infty) = Y_1 \cup Y_2$，$Y_1 \cap Y_2 = $ 空，Y_1, Y_2 は共に空でない open set，

従って，$\mathcal{M}(I^\infty)$ は disconnected である。　Q. E. D.

§4. $H^\infty(m)$ の w^* maximality について.

定理C. 次の事柄は同値である。

1) $H^\infty(m)$ は $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal である。

2) $H^\infty(m) = \mathcal{H}^\infty$.

3) $f \in H^\infty(m)$, $\hat{f}(\varphi) = 0$ for all φ in $P(m) \Rightarrow f \equiv 0$ a.e. (m).

4) $\int \log|f|\, dm > -\infty$ for all $f \in H^\infty(m)$, $f \not\equiv 0$.

5) $f \in H^\infty(m)$, $f \not\equiv 0$ ならば f は outer function g と inner function h との積に分解出来る.

証明. 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) は [5], [6] による.

1) $\Rightarrow$ 2)；若し $I^\infty \supsetneqq$ 0 ならば $H^\infty(m) \subsetneqq B \subsetneqq L^\infty(m)$

なる w^* closed な subalgebra が存在する（例えば，定理B の証明の中の $B = \mathcal{L}^\infty \oplus I^\infty$）．対偶をとればよい．

2) ⇒ 1)；$H^\infty(m) = \mathcal{H}^\infty \Leftrightarrow I^\infty = \{0\}$．故に $L^\infty(m) = \mathcal{L}^\infty$ で $TH^\infty(m) = H^\infty(d\theta)$，$T\mathcal{L}^\infty = L^\infty(d\theta)$（§2．(1.2) 以下参照）一方 $H^\infty(d\theta)$ は $L^\infty(d\theta)$ の w^* closed subalgebra として maximal である．よって 1) が従う．

2) ⇔ 3)；　$I^\infty = \{f \in H^\infty(m);\ \varphi(f) = 0 \text{ for all } \varphi \in P(m)\}$ より明らか．

2) ⇒ 4)；$f \in H^\infty = \mathcal{H}^\infty \subset H^2 = \mathcal{H}^2$，$f \neq 0$ から

$f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n Z^n \quad (a_{n_0} \neq 0)$．　$\bar{Z}^{n_0} f = a_{n_0} + a_{n_0+1} Z + \cdots$

$\therefore \int \log|f|\,dm = \int \log|\bar{Z}^{n_0} f|\,dm \geq \log\left|\int a_{n_0}\,dm\right| = \log|a_{n_0}| > -\infty$.

4) ⇒ 2)；対偶をとって，2) でないならば，$\exists f \in I^\infty \subset H^\infty(m)$，$f \neq 0$，$\int \log|f|\,dm = -\infty$ となることを示せばよい．I^∞ から任意の要素 f をとる．若し $\int \log|f|\,dm > -\infty$ ならば $|f| > 0$ a.e. (m)．さて，複素平面の単位円周 $K = \{|\lambda| = 1\}$ 上に (dθ-) 可測な集合 E で $0 < \theta(E) = \int_K \chi_E\,d\theta < 1$ となるものをとる．（$d\theta$ は normalized Lebergue measure，χ_E は E の特性関数である）．$U_E = \{\varphi;\ \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty d\theta),\ \varphi(\chi_E) = 0\}$，$U_{K|E} = \{\varphi;\ \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty d\theta),\ \varphi(\chi_E) = 1\}$ は $\mathcal{M}(L^\infty d\theta)$ の nonempty clopen set である．$T^{-1}\chi_E = \chi \in \mathcal{L}^\infty$ とおく（§2，(1.2) 式以下参照）．

$T^* U_E = \{\varphi ; \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty), \varphi(\chi)=0\}$, $T^* U_{K\setminus E} = \{\varphi ; \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty), \varphi(\chi)=1\}$ は $\mathcal{M}(L^\infty)$ の nonempty clopen set である. 定理 A, 2) での Π によって, $U = \Pi^{-1}(T^* U_E)$, $V = \Pi^{-1}(T^* U_{K\setminus E})$ は $\tilde{X}$ の nonempty clopen set で $\tilde{X} \setminus U = V$ である。いま $F = \chi f$ とおくと, 補題 3.1 から $F \in I^\infty \subset H^\infty(m)$,

$$\tilde{F} = \begin{cases} 0 & \text{on } U \\ \tilde{f} & \text{on } \tilde{X} \setminus U \end{cases}$$

$$\therefore \int \log |F| \, dm = \int_{\tilde{X}} \log |\tilde{F}| \, d\tilde{m} = -\infty .$$

4) $\Longleftrightarrow$ 5) は明白.

文献

[1] E. Bishop and K. de Leeuw, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier 9 (1959).

[2] R. G. Douglas and W. Rudin, Approximation by inner functions, Pacific J. Math., 31 (1969).

[3] T. W. Gamelin, Uniform algebra, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1969).

[4] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular

Banach algebra, Acta Math., 108 (1962).

[5] S. Merrill, Maximality of certain algebras $H^\infty(dm)$, Math. Zeits., 106 (1968).

[6] S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras, Pacific J. Math., 30 (1969).