数理解析研究所講究録
第172巻 1973年 78-87

変数変換によるTaylor級数の収束の加速

東大理　高橋秀俊
京大数研　森　正武

§1 Taylor級数の変数変換

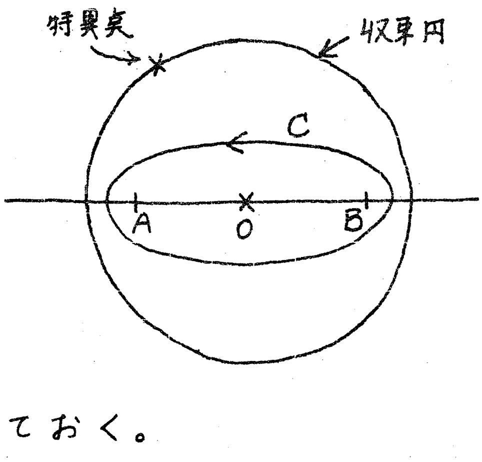
原点の近くで正則な関数のTaylor展開を

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}f^{(n-1)}(0)+R_n(x) \tag{1-1}$$

とする。$R_n(x)$ は次式で与えられる[1)]。

$$R_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \Phi_n(z,x)f(z)dz \tag{1-2}$$

$$\Phi_n(z,x)=\frac{x^n}{(z-x)z^n} \tag{1-3}$$



級数(1-1)は実際にはこれが収束するような原点を含む実軸上のある区間[A, B]で使われることが多いので、積分路Cとしてはその区間[A, B]を反時計まわりに囲む右図のような閉曲線をとっておく。

級数(1-1)の独立変数に原点不動の変換

$$x = \varphi(u) \quad , \quad 0 = \varphi(0) \tag{1-4}$$

を行ってみよう。その結果を

$$g(u) = f(\varphi(u)) \tag{1-5}$$

とおく。ただし $\varphi(u)$ は原点の近くで正則で

$$\varphi(u) = u\varphi'(0) + \frac{1}{2!}u^2\varphi''(0) + \cdots\cdots \tag{1-6}$$

とTaylor展開できるものとする。このとき $g(u)$ は原点の近くで正則になりTaylor級数に展開することができる。

$$g(u) = g(0) + ug'(0) + \frac{1}{2!}u^2 g''(0) + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}g^{(n-1)}(0) + \hat{R}_n(u) \tag{1-7}$$

$$\hat{R}_n(u) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\hat{c}} \hat{\Phi}_n(w,u)\, g(w)\, dw \tag{1-8}$$

$$\hat{\Phi}_n(w,u) = \frac{u^n}{(w-u)w^n} \tag{1-9}$$

誤差式 $\hat{R}_n(u)$ は w-平面内の複素積分で表わされているが、(1-2) と比較するためにこれを (1-4) の逆変換

$$w = \varphi^{-1}(z) \tag{1-10}$$

によって z-平面内の積分に直すと次のようになる。

$$\tilde{R}_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \tilde{\Phi}_n(z,x)\, f(z)\, dz \tag{1-11}$$

$$\tilde{\Phi}_n(z,x) = \frac{\{\varphi^{-1}(x)\}^n}{\{\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(x)\}\{\varphi^{-1}(z)\}^n}\{\varphi^{-1\prime}(z)\} \tag{1-12}$$

xの値を固定したとき、同一のnに対してもし

$$|\tilde{R}_n(x)| < |R_n(x)| \tag{1-13}$$

が成立すれば、はじめの級数(1-1)よりも変換後の級数(1-7)の方が同一数の項で誤差が少くなっているから変数変換$x=\varphi(u)$は有効である。この不等式を満足するような変換を、与えられた関数$f(z)$の解析的性質を考慮しながら見出すことができればTaylor級数の収束を加速することができる。

§2　変数変換のアルゴリズム

関数$f(x)$の定義式が比較的簡単な算術式などで与えられていれば変換$x=\varphi(u)$により直接$g(u)$の展開形を導くことも可能であろう。しかし、$f(x)$がはじめから級数で定義されている場合でも次のようにこの変換を実行することができる。

$f(x)$がTaylor級数に限らず一般に次の形の級数で与えられているとする。

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots \tag{2-1}$$

また変換の関数$\varphi(u)$は$\varphi(0)=0$を満足していて

$$x = \varphi(u) = b_1 u + b_2 u^2 + \cdots + b_k u^k + \cdots \tag{2-2}$$

のように展開されるとしよう。このとき(2-2)を(2-1)に代入すると

$$f(x) = a_0 + a_1(b_1 u + b_2 u^2 + \cdots\cdots) + a_2(b_1 u + b_2 u^2 + \cdots)^2 + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m u^m \tag{2-3}$$

となる。ここで展開の係数 c_m は次のようになる。

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_1 = a_1 b_1 \\ c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2 \\ c_3 = a_1 b_3 + a_2 (b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 b_1^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases} \tag{2-4}$$

一般に係数 c_m において a_l に掛けられるものは b_k の l 次多項式であって、その多項式の形を

$$b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \cdots\cdots b_{k_l} \tag{2-5}$$

とすると添字の満足する関係は

$$k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_l = m \tag{2-6}$$

である。このように原点不動の変数変換は有限の操作で実行することができる。

§3　1次変換

変数変換の実用的な例として原点を不動に保つ1次変換を考えよう。

$$x = \varphi(u) = \frac{bu}{u-a} \qquad ; a, b \neq 0 \tag{3-1}$$

これを逆に u について解けば対称に

$$u = \varphi^{-1}(x) = \frac{ax}{x-b} \tag{3-2}$$

となる。このとき(1−12)は次のようになる。

$$\tilde{\Phi}_n(z,x) = \frac{(z-b)^{n-1}\,x^n}{(x-b)^{n-1}(z-x)z^n} = \left(\frac{z-b}{x-b}\right)^{n-1}\Phi_n(z,x) \tag{3-3}$$

いま最も単純な場合を考え、関数$f(z)$が単に$z=\eta$に1つの極を持つ有理関数であると仮定する。このときηにおける$f(z)$の留数をRとおくと、積分(1−2)，(1−11)に留数定理を適用すれば次の関係を得る。

$$R_n(x) = -R\,\Phi_n(\eta,x) \tag{3-4}$$

$$\tilde{R}_n(x) = -R\,\tilde{\Phi}_n(\eta,x) \tag{3-5}$$

したがってこの場合不等式(1−13)が満足されるためには

$$|\tilde{\Phi}_n(\eta,x)| < |\Phi_n(\eta,x)| \tag{3-6}$$

すなわち(3−3)より

$$|\eta-b| < |x-b| \tag{3-7}$$

が満足されなければならない。区間[A，B]内の任意のxの値に対して不等式(3−7)を満足するbの値を選べば変数変換(3−1)によってTaylor級数の収束を加速することができる。

ここで(3−7)の関係がaが現れていないが、実際変換(3−1)による効率はaに依存しない。なぜなら、変換$w=az/(z-b)$によってはじめの級数の特異点ηは$\zeta=a\eta/(\eta-b)$へ写像さ

れる。したがってはじめ大きさ $|\eta|$ であった収束半径は $|\zeta|=|a\eta/(\eta-b)|$ になる。そして点 $x=x_0$ における $f(x)$ の値を計算するために値 $u_0=ax_0/(x_0-b)$ を級数 (1−7) に代入する。このとき級数 (1−7) の収束の速さを決めるのは比 $|u_0|/|\zeta|=\{|x_0|\cdot|\eta-b|\}/\{|x_0-b|\cdot|\eta|\}$ であり これは a に依存しない。

$f(z)$が有理関数でなくても、積分 (1−2) あるいは (1−11) において誤差に大きく寄与するような代表点を η としてとることができれば、同じようにして (3−7) を満足する b を選ぶことができる。例えば対数分岐点あるいは代数的分岐点は多くの場合このような代表点となり得る。また超越有理関数の場合でも、有限な領域に存在している特異点が誤差 (1−2) あるいは (1−11) に大きく寄与して上と同じ扱いが可能になることが多い。

不等式 (3−7) は一般にかなり広い範囲の b の値に対して成立する。したがって b の選択は、不等式 (3−7) を満足させると同時に、変換後の級数 (1−7) 自身の収束半径が最大になるなど、場合に応じて他の条件を考慮に入れて行うべきである。

§4 変数変換の例 (i) 対数関数

対数関数の Taylor 展開

$$f(x)=\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots,\quad |x|\leq 1,\ x\neq -1 \qquad (4-1)$$

に対して変数変換

$$x = \varphi(u) = \frac{bu}{u-1} \tag{4-2}$$

を考えよう。ここで $a=1$ とした。このとき (4−1) は

$$g(u) = \log\left(1 + \frac{bu}{u-1}\right) = \log\frac{1-(b+1)u}{1-u} \tag{4-3}$$

となる。この変換により二つの対数分岐点 u_1, u_2 が現れる。

$$u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{b+1} \tag{4-4}$$

$g(u)$ を原点 $u=0$ を中心とする Taylor 級数に展開するとき、実用上はこれらの特異点が左右対称に位置していることが望ましいであろう。したがって $u_2 = \frac{1}{b+1} = -u_1 = -1$ とおくとこれから

$$b = -2 \tag{4-5}$$

を得る。

与えられた関数 $f(z) = \log(1+z)$ は $z=-1$ に対数分岐点を持つ。誤差の積分 (1-2) あるいは (1-11) においてこの点からの寄与が大きく、したがって (3-7) において $\eta=-1$ ととることができる。このようにとると、$b=-2$ のとき不等式 (3-7) は

$$1 < |x+2| \tag{4-6}$$

となり、これは $-1 < x \leq 1$ のすべての x に対して満足される。したがって変数変換

$$x=\frac{2u}{1-u}\quad,\quad u=\frac{x}{x+2} \qquad (4\text{-}7)$$

は有効で、特にxが大きいほどその効果は大である。このとき$g(u)$は次のようになる。

$$g(u)=\log\frac{1+u}{1-u}=2\left(u+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+\cdots\right) \qquad (4\text{-}8)$$

§5 変数変換の例 (ii) Euler 変換

級数

$$f(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+1} \qquad (5\text{-}1)$$

に、$b=1$, $a=-1$ とおいた1次変換

$$x=\varphi(u)=\frac{u}{1+u}\quad,\quad u=\frac{x}{1-x} \qquad (5\text{-}2)$$

を行うと

$$g(u)=-\sum_{j=0}^{\infty}(\Delta^j a_0)\,u^{j+1} \qquad (5\text{-}3)$$

が得られる[2)]。ただし $\Delta^j a_0$ は右図のように計算される係数の階差である。この変換を一般Euler変換という。

$$\begin{array}{llll}
a_0 & & & \\
 & \Delta a_0 & & \\
a_1 & & \Delta^2 a_0 & \\
 & \Delta a_1 & & \Delta^3 a_0 \;\cdots \\
a_2 & & \Delta^2 a_1 & \\
 & \Delta a_2 & & \Delta^3 a_1 \\
a_3 & & \Delta^2 a_2 & \\
 & \Delta a_3 & & \Delta^3 a_2 \\
a_4 & & \Delta^2 a_3 & \\
 & \Delta a_4 & & \\
a_5 & & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

特に(5−1)で$x=-1$とおいた級数

$$f(-1)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \tag{5-4}$$

に対して，変換された式

$$f(-1)=g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^j}\Delta^j a_0 \tag{5-5}$$

を Euler 変換という。

簡単な例として等比級数

$$f(-1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^k} \tag{5-6}$$

を考え、どのような p に対して Euler 変換が有効であるかをみよう。この級数は変数 x に関する Taylor 展開

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{p}\right)^k \tag{5-7}$$

において $x=-1$ とおいたものとみることができる。Taylor 展開 (5-7) は

$$|x|<|p| \tag{5-8}$$

のとき収束し、それは $z=p$ に極を持つ有理関数

$$f(z)=\frac{p}{p-z} \tag{5-9}$$

を表わす。

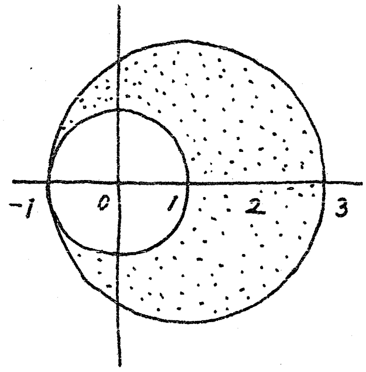
ここで Euler 変換が有効であるための条件 (3-7) に $\eta=p$, $\delta=1$, $x=-1$ を代入すると

$$|p-1| < 2 \qquad (5\text{-}10)$$

を得る。これにはじめの級数が収束するための(5-8)の条件

$$1 < |p| \qquad (5\text{-}11)$$

を併せれば、結局pが右図の点線をつけた領域の値のときEuler変換が有効であることが結論される。



例えば $p=2$ として

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \qquad (5\text{-}12)$$

にEuler変換を行うと

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} \qquad (5\text{-}13)$$

となり収束は速くなる。収束の加速の度合は(5-10)より比

$$r = \frac{|p-1|}{2} = \frac{1}{2} \qquad (5\text{-}14)$$

で与えられるが、いまの場合確かに2倍に加速される。これに対して $p=4$ として

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \qquad (5\text{-}15)$$

にEuler変換を行うと

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^j \qquad (5\text{-}16)$$

となり収束はかえって悪くなる。rは(5-14)より$3/2$である。

[参考文献]

1) 森口他：数学公式II：岩波全書：p.126

2) R. Hamming : Numerical Methods for Scientist and Engineers : McGraw-Hill : p.50.