数理解析研究所講究録
第197巻 1974年 93-101

自己相関関数の推定量の漸近的性質

東工大 理　　藤井光昭

§1. 序論

時系列解析の理論においては，問題にしている統計量の種々の統計的性質を論じる場合に，標本数Nが十分大きいと仮定される漸近的な理論が多い。これは一つには，各時点の標本の間に独立性（無相関性）がないのが普通で，このために問題にしている統計量の分布やモーメント等を求めるのは非常に複雑で困難になることが多いからでもあるであろう。この場合に，もし標本数Nが大きいときには，適当な条件——たとえば十分離れた2つの時点の値の間の相関は小さい等々——をおくことによりその統計量の分布やモーメントの評価において，Nの次数のより小さな形で影響する部分を無視することによりかなり見やすい形の結果（近似的な）を導くことができる。

ここでは自己相関関数の推定量のなかで，Nを大きくした

ときに漸近的に有効性をもつものについての考察において得られた結果の一部を報告する。

時系列解析の推定の理論においては，一般的には未知パラメーターが無限個あるなどにより最良の推定量を具体的に見出すことは困難な場合が多い。またどのようなものを最良の推定量とよぶかも問題になるであろう。しかしその時系列が更に自己回帰モデルに従っているというような仮定をおくと，自己相関関数などは有限個のパラメーターで記述できるため通常の意味での漸近的な最良の推定量が求められる。

ここではある種の条件をみたす時系列（定常確率過程）を自己回帰過程で近似するという形をとって，時間差 h の自己相関関数 ρ_h の推定量として通常よく用いられる $\hat{\rho}_h = \hat{R}(h)/\hat{R}(0)$（但し，標本を $X(1)$, $X(2)$, ・・・, $X(N)$ とし $\hat{R}(h)=\sum_{n=1}^{N-h} X(n)X(n+h)/(N-h)$, $(h \geqq 0)$）が N を大きくするとき漸近的に有効推定量であることを示す。ただし，ここで仮定した時系列がみたすべき条件はかなりきびしく今後改良する必要があるであろう。

§2. ここで扱う定常確率過程

$X(n)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, を定常正規過程とし，話を簡単にするため $EX(n)=0$ と仮定する。また

$$R(k)=EX(n+k)X(n)\ ,\quad \rho_k=R(k)/R(0)$$

とおくことにする。§3，§4ではρ_kの推定を論じる。

仮定I． $X(n)$はスペクトル密度関数$f(\lambda)$をもち，そして$f(\lambda)$は

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\log f(\lambda)\,d\lambda>-\infty$$

をみたす。

つぎに$\xi(n)$を$\{X(n);-\infty<n<+\infty\}$からつくられるwhite noiseとし，$\{X(j);j\leqq n\}$の線型結合からつくられるヒルベルト空間を$L_2(X;n)$のようにあらわすことにするとき

$$L_2(X;n)=L_2(\xi;n)$$

が成り立つものとする。事実，仮定Iが成り立てばこのような$\xi(n)$をつくることが出来る。（［4］参照）。いま

$$\xi(n)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k X(n-k)\qquad\text{-----(1)}$$

但し$a_0=1$

と表現されているものとする。

仮定2． $|a_k|\leqq\alpha^k\qquad k=1,2,3,\cdots$

但し$0\leqq\alpha<1/2$.

このとき次の結果を得る。ここで$X(n)$の$\xi(n)$を用いての移動平均表

現を

$$X(n)=\sum_{k=0}^{\infty} G_k \xi(n-k)$$

とする（［４］参照）。

補題１．　$|G_k| \leqq (2\alpha)^k/2 \qquad k=1,2,\cdots$

証明の概略．　Zを$|Z|<1$なる任意な複素数とし$A(Z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k$，$G(Z)=\sum_{l=0}^{\infty} G_l Z^l$とおくと，仮定１により$A(Z)=0$，$G(Z)=0$の根はともに$|Z|<1$にはなく，$A(Z)=1/G(Z)\quad(|Z|<1)$なる関係があり，これより$\sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu G_{\mu-\nu}=0\quad(\mu \geqq 1)$が導かれ，これを利用して評価できる。

補題２．　$|\rho_h| \leqq C(2\alpha)^h \qquad h=1,2,\cdots$

但しCはhに無関係な定数．

証明の概略．　$R(h)=E\left(\sum_{k=0}^{\infty} G_k \xi(n+h-k)\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} G_l \xi(n-l)\right)=\sigma_\xi^2\cdot\sum_{l=0}^{\infty} G_{l+h} G_l$であるからこれを用いて評価できる。$\sigma_\xi^2=E\xi(n)^2$．

さて，$X_K(n)$を定常正規過程で

$$a_0 X_K(n)+a_1 X_K(n-1)+a_2 X_K(n-2)+\cdots+a_K X_K(n-K)=\xi(n) \quad \cdots\cdots(2)$$

なるモデルに従うＫ次の自己回帰過程であるとする。ここで$\{a_k\}$，$\xi(n)$は（１）におけるものと同じである。このとき明らかに$EX_K(n)=0$である。いま$A^{(K)}(Z)=\sum_{k=0}^{K} a_k Z^k$とおくと，$A^{(K)}(Z)$は$|Z|<1$で明らかに正則でＫが十分大なるとき

$A^{(K)}(z)=0$ の根は単位円内部にはない。以後Kは十分大であるとする。$G^{(K)}(z)=1/A^{(K)}(z)$ とおくと，$G^{(K)}(z)$ は $|z|<1$ で正則である。$G^{(K)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} G_k^{(K)} z^k$ とおく。このとき $0\leqq k\leqq K$ に対して $G_k^{(K)}=G_k$ であることがわかり，$l\geqq 1$ に対して $\sum_{j=0}^{K} G_{K+l-j}^{(K)} a_j=0$ なる関係がある。これより

補題 3. $|G_k^{(K)}|\leqq (2\alpha)^k/2.$ $k=1, 2, \cdots$

$R_K(h)=EX_K(n+h)X_K(n)$, $\rho_h^{(K)}=R_K(h)/R_K(0)$ とおく。

補題 4. 任意に小さな $\varepsilon>0$ に対して，十分大なる正整数 K_ε をとれば，$K>K_\varepsilon$ なる任意な K に対して

$$\sum_{h=1}^{\infty} |\rho_h-\rho_h^{(K)}|<\varepsilon .$$

証明の概略. $R_K(h)=\sigma_\xi^2\left(\sum_{l=0}^{K-h} G_{l+h}G_l+\sum_{l=K+1-h}^{\infty} G_{l+h}^{(K)} G_l^{(K)}\right)$ を用いる。

§3. 自己回帰過程と最尤推定量

§2の後半述べたK次の自己回帰過程 $X_K(n)$ の自己相関関数 $\rho_h^{(K)}$ についてまず述べる。Kを十分大にとり，$L_2(X_K;n)=L_2(\xi;n)$ が成り立つようにできる。このときすべての k, $1\geqq k$, に対して $E\xi(n)X_K(n-k)=0$ であるから

$$\sum_{l=0}^{K} a_l\rho_{k-l}^{(K)}=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

$k=1, 2, 3, \cdots$

なる関係がある。いま

仮定3.　$\{a_k ; 1 \le k \le K\}$ には互に関数関係がない.

(i, j) 要素が $\rho^{(K)}_{i-j}$ $(1 \le i, j \le N)$ であるような行列を $D^{(K)}_N$ とあらわすことにする。行列式 $|D^{(K)}_N|$ はすべての N について 0 でないとする. このとき (3) なる関係により $a_1, a_2, \cdots, a_K$ により $\rho^{(K)}_j$ $(1 \le j)$ はすべて定まり, 逆に $\rho^{(K)}_1, \rho^{(K)}_2, \cdots, \rho^{(K)}_K$ により a_k $(1 \le k \le K)$ および $\rho^{(K)}_{K+j}$ $(j \ge 1)$ はすべて定まる。従って K 次の自己回帰過程の自己相関関数のの推定には, K 個のパラメーター ($\{a_k, 1 \le k \le K\}$ または $\{\rho^{(K)}_k, 1 \le k \le K\}$) の推定を考えればよい。

$\xi(n)$ は独立な正規分布に従うから $\{a_k\}$ の最尤推定量は標本数 N が十分大なるとき, 最小2乗法

$$\frac{1}{N-K}\sum_{n=K+1}^{N}\left(X_K(n)+a_1X_K(n-1)+a_2X_K(n-2)+\cdots+a_KX_K(n-K)\right)^2 \to \min.$$

により得られる。この解を $\hat{a}_k, (1 \le k \le K)$, とする。H を任意な正整数とするとき, ρ_h $(1 \le h \le H)$ の最尤推定量は, $\{\hat{a}_k\}$ を (3) の $\{a_k\}$ にそれぞれ代入することにより, その解 $\hat{\rho}_h$ として求められる。これらの最尤推定量は N を大きくするとき漸近的に有効推定量になる。([2] 参照)。

定理1.　$X_K(n)$ $(EX_K(n)=0)$ を定常正規過程で K 次の自己回帰過程であるとする。このとき $\hat{\rho}^{(K)}_h = \tilde{R}_K(h)/\tilde{R}_K(0)$ は N を大

きくするとき漸近的に $\rho_h^{(K)}$ の有効推定量（$1\leqq h\leqq H$）である。ここで $\tilde{R}_K(l)=\sum_{n=1}^{N-l}X_K(n+l)X_K(n)/(N-l)$，$l\geqq 0$，である。

証明の概略．(3) 式および $\{a_k\}$ の最尤推定量を求めるときの尤度方程式の比較により導き出すことが出来る。

§4. $\hat{\rho}_h$ の漸近的有効性

ρ_h（$1\leqq h\leqq H$）の同時推定を考える。ここで $X(n)$ は §2 の条件をみたす定常正規過程であるとする。$X(n)$ に対して §2 で考えた K 次の自己回帰過程 $X_K(n)$ を考えることにする。$\mathbb{X}_N=(X(1), X(2), \cdots, X(N))$ の同時確率密度関数を $\varphi_N(\mathbb{X}_N;\boldsymbol{\rho}_N)$，$\mathbb{X}_N^{(K)}=(X_K(1), X_K(2), \cdots, X_K(N))$ のそれを $\varphi_N^{(K)}(\mathbb{X}_N^{(K)};\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})$ のようにあらわすことにする。但し $\boldsymbol{\rho}_N=(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N)$，$\boldsymbol{\rho}_N^{(K)}=(\rho_1^{(K)}, \rho_2^{(K)}, \cdots, \rho_N^{(K)})$．$\varphi_N(\mathbb{X}_N;\boldsymbol{\rho}_N)$ の情報行列 $I(\boldsymbol{\rho}_N)$ の (h, l) 要素および $\varphi_N^{(K)}(\mathbb{X}_N^{(K)};\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})$ の情報行列 $I^{(K)}(\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})$ の (h, l) 要素はそれぞれ

$$\frac{1}{N}E\left(\frac{\partial\log\varphi_N(\mathbb{X}_N;\boldsymbol{\rho}_N)}{\partial\rho_h}\frac{\partial\log\varphi_N(\mathbb{X}_N;\boldsymbol{\rho}_N)}{\partial\rho_l}\right),\quad \frac{1}{N}E\left(\frac{\partial\log\varphi_N^{(K)}(\mathbb{X}_N^{(K)};\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})}{\partial\rho_h^{(K)}}\frac{\partial\log\varphi_N^{(K)}(\mathbb{X}_N^{(K)};\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})}{\partial\rho_l^{(K)}}\right)$$

$$1\leqq h, l\leqq H$$

である。これらをそれぞれ $I_{h,l}(\boldsymbol{\rho}_N)$ および $I_{h,l}^{(K)}(\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})$ とおくことにする。

補題5．K が十分大であるとき，任意な h（$1\leqq h\leqq H$）に対して $|\partial\rho_{K+j}^{(K)}/\partial\rho_h^{(K)}|\leqq(2\alpha)^{K+j}D$，(ただし $j\geqq 1$ で D は j に

無関係な定数)，が成り立つ。

証明の概略. (3) 式の $1 \leqq k \leqq K$ の式の両辺を $\rho_h^{(K)}$ で偏微分して得られる得られる $\partial a_k / \partial \rho_h^{(K)}$ $(1 \leqq k \leqq K)$ の評価式に, $(D_K^{(K)})^{-1}$ の各行の α に関する次数の評価を入れ（K が大なるとき）, (3) 式で $k = K + j$ とした式の両辺を $\rho_h^{(K)}$ で偏微分して得られるものを用いて示すことができる。

補題 6. 任意に小さな $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きい正整数 K をとれば $\left| I_{h,l}(\boldsymbol{\rho}_N) - I_{h,l}^{(K)}(\boldsymbol{\rho}_N^{(K)}) \right| < \varepsilon$ が成り立つ.

証明の概略.
$$\frac{\partial \log \varphi_N^{(K)}(\boldsymbol{X}_N^{(K)}; \boldsymbol{\rho}_N^{(K)})}{\partial \rho_h^{(K)}} = \left. \frac{\partial \log \varphi_N(\boldsymbol{X}_N; \boldsymbol{\rho}_N)}{\partial \rho_h} \right|_{\boldsymbol{\rho}_N = \boldsymbol{\rho}_N^{(K)}} + \sum_{j=1}^{N-K} \left. \frac{\partial \log \varphi_N(\boldsymbol{X}_N; \boldsymbol{\rho}_N)}{\partial \rho_{K+j}^{(K)}} \right|_{\boldsymbol{\rho}_N = \boldsymbol{\rho}_N^{(K)}} \frac{\partial \rho_{K+j}^{(K)}}{\partial \rho_h}$$
および補題 5 の結果を利用して導き出すことができる.

$\hat{\rho}_h$ $(1 \leqq h \leqq H)$ の分散・共分散行列を $|\mathrm{Cov.}(\hat{\rho}_h, \hat{\rho}_l)|$ のようにあらわすことにする。

補題 7. 任意に小さな $\varepsilon > 0$ に対して，正整数 K を十分大きくとれば, $\left| \, |\mathrm{Cov.}(\hat{\rho}_h, \hat{\rho}_l)| - |\mathrm{Cov.}(\hat{\rho}_h^{(K)}, \hat{\rho}_l^{(K)})| \, \right| < \varepsilon$ が成り立つ.

定理 2. $X(n)$ を §2 で述べたような性質をもつ定常正規過程であるとする。このとき $\tilde{\rho}_h$ $(1 \leqq h \leqq H)$ は N を大きくする

とき漸近的に有効推定量である.

証明の概略. $X(n)$ に対して§2で考えたようなK次の自己回帰過程を考え, Kを十分大きくして $X(n)$ を近似させる(補題4の意味で)。 そして

$$\frac{|\mathrm{Cov}(\tilde{\rho}_h, \hat{\rho}_\ell)|}{|I(\boldsymbol{\rho}_N)|} = \frac{|\mathrm{Cov}.(\tilde{\rho}_h, \hat{\rho}_\ell)|}{|\mathrm{Cov}(\hat{\rho}_h^{(K)}, \hat{\rho}_\ell^{(K)})|} \cdot \frac{|\mathrm{Cov}(\hat{\rho}_h^{(K)}, \hat{\rho}_\ell^{(K)})|}{|I^{(K)}(\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})|} \cdot \frac{|I^{(K)}(\boldsymbol{\rho}_N^{(K)})|}{|I(\boldsymbol{\rho}_N)|}$$

として考えることにより, 右辺第1項はKを十分大にして, 第2項はNを十分大にして, 第3項はKを十分大にすることによりそれぞれ1に近づくことを用いる.

参考文献

[1] Anderson, T. W. (1971), The statistical analysis of time series, John Wiley & Sons, New York,

[2] Cramér, H. (1946), A contribution to the theory of statistical estimation, Skandinavisk Aktuarietidskrift, Vol. 29, pp. 85-94.

[3] Durbin, J. (1960), Estimation of parameters in time-series regression models, J. R. Statist. Soc., Vol. 22, pp. 139-153.

[4] Grenander, U. and Rosenblatt, M. (1957), Statistical analysis of stationary time series, John Wiley & Sons, New York.

[5] Whittle, P. (1953), Estimation and information in stationary time series, Arkiv för Matematik, Vol. 2, pp. 423-434.