数理解析研究所講究録
第 197 巻 1974 年 123-133

対称行列又はエルミート行列の固有根の導関数と多変量解析への応用

広島大 理　杉浦 成昭

§1. 序

S を Wishart 分布 $W_p(n,\Sigma)$ に従う正値対称行列とする。S の α 番目に大きい固有根を l_α とおく。l_1 の exact な分布は Sugiyama[11], Muirhead[9] により次のように求められている。

$$P(l_1<x)=C(p,n)|\Sigma|^{-n/2}x^{pn/2}\,{}_1F_1\left(\frac{n}{2};\frac{n+p+1}{2};-\frac{x}{2}\Sigma^{-1}\right)$$

$$(1.1.)\qquad =C(p,n)|\Sigma|^{-n/2}x^{pn/2}\,\mathrm{etr}\left(-\frac{1}{2}x\Sigma^{-1}\right)\,{}_1F_1\left(\frac{p+1}{2};\frac{n+p+1}{2};\frac{x}{2}\Sigma^{-1}\right)$$

ただし　$C(p,n)=\Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}\right)\left\{2^{np/2}\,\Gamma_p\left(\frac{n+p+1}{2}\right)\right\}^{-1}$

最小根 l_p の exact な分布について Khatri[7] は $(n-p-1)/2$ が非負の整数であるとき次の式を与えた。

$$(1.2.)\qquad P(l_p<x)=1-\mathrm{etr}\left(-\frac{x}{2}\Sigma^{-1}\right)\sum_{k=0}^{p(n-p-1)/2}\sum_{\kappa}^{*}x^{k}C_\kappa(\Sigma^{-1})/k!$$

ただし $\sum_\kappa^*$ は $((-n+p+1)/2)_\kappa \neq 0$ なる k の分割 κ についての和を表わす。一般の場合は Hirakawa[5] により Laguerre 多項式を用いて次のように与えられている。

$$P(l_p < x) = 1 - \Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \left\{ \Gamma_p(p+1)\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)|\Sigma|^{n/2} 2^{np/2} \right\}^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \cdot \frac{L_\kappa^{n/2}\left(\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\right)}{k!\left(\frac{1}{2}(n+p+1)\right)_\kappa C_\kappa(I_p)} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa_1} \frac{\left(\frac{1}{2}(p+1)\right)_{\kappa_1}}{k_1!(p+1)_{\kappa_1}} \tag{1,3}$$

$$\sum_{\nu} g_{\kappa\kappa_1}^{\nu}\left(\frac{n+p+1}{2}\right)_\nu C_\nu(I_p)\, x^{\frac{pn}{2}+k}(1+x)^{-\frac{1}{2}p(n+p+1)-k-k_1}$$

ただし$g_{\kappa\kappa_1}^{\nu}$は$C_\kappa(S)C_{\kappa_1}(S)=\sum_{\nu} g_{\kappa\kappa_1}^{\nu} C_\nu(S)$ より定まる定数とする。$\Sigma=I$ のときやSが noncentral Wishart 分布のときについては他にいくつかの結果がある。

筆者は数年前よりこれらの結果を用いてl_αの分布のnが大きいときの漸近展開を求めようと試みたが現在のところ成功していない。ここでは別の方法，すなわちl_αのSについての Taylor 展開を求めることによりΣのα番目に大きい固有根λ_αが単根であれば 任意のαについてl_αの分布の漸近展開が求まることを示す。

これの応用として対称行列の空間での微分 operator を固有値の空間での微分 operator に変換することが可能となり，Fujikoshi [2]. Hayakawa [4] が求めていた zonal 多項式$C_\kappa(S)$に関する微分関係式が実は James [6] が metric $tr(S^{-1}dS)^2$ に関する Laplace-Beltrami operator の固有値を計算することから求めた偏微分方程式に対応していることが示される。すなわち漸近展開の方から James の偏微分方程式が導ける。さらにこの方法で zonal 多項式に対する新しい偏微分方程式も得られる。

Hを複素 Wishart 分布$\tilde{W}_p(n,\tilde{\Sigma})$に従う正値 Hermite 行列とする。

$\tilde{l}_\alpha$をHのα番目に大きい固有根とする。$\tilde{l}_\alpha$の分布の漸近展開およびHに対するzonal多項式$\tilde{C}_\kappa(H)$に関する偏微分方程式も同様な議論で求まる。ここでは簡単のためorderの低い場合のみ述べるが詳しい内容は筆者[10]にある。

§2 固有根$l_\alpha, \tilde{l}_\alpha$のTaylorの展開

$f(l,S)=|S-lI|$を考えればfはlおよびSの元$s_{ij}(i\leq j)$について無限回微分可能である。よって陰関数の定理により$f(l,S)=0$より定まるl_αはSの関数とみたとき$\partial f/\partial l \neq 0$なる点において無限回微分可能である。$S=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$での微分について次の結果が成り立つ。

Lemma 2.1. λ_αが単根のとき。

(2,1) $$\frac{\partial l_\alpha}{\partial s_{\alpha\alpha}}=1,\ \frac{\partial l_\alpha}{\partial s_{ij}}(i=j=\alpha\text{を除く})=0,\ \frac{\partial^2 l_\alpha}{\partial s_{\alpha j}^2}=\frac{2}{\lambda_\alpha-\lambda_j}\ (j\neq\alpha)$$
$$\frac{\partial^2 l_\alpha}{\partial s_{ij}\,\partial s_{kl}}=0\quad(\text{上の場合を除く})$$

これより$l_\alpha(S)$の$\frac{1}{n}S=\Lambda$でのTaylor展開が次のように求まる。

(2,2) $$\frac{1}{n}l_\alpha=\lambda_\alpha+\left(\frac{s_{\alpha\alpha}}{n}-\lambda_\alpha\right)+\frac{1}{2!}\sum_{j\neq\alpha}\frac{2}{\lambda_\alpha-\lambda_j}\left(\frac{s_{\alpha j}}{n}\right)^2+\cdots\cdots$$

HをHermite行列としその(r,s)要素について実数部と虚数部に分けて$h_{rs}=h_{rs}^R+ih_{rs}^I$とおく。当然$h_{rr}^I=0$である。Hのα番目に大きい固有根$\tilde{l}_\alpha$についても$H=\Lambda$での微分がLemma 2.1.と同様な形で成り立つ。

Lemma 2.2. λ_αが単根のとき

(2,3) $\dfrac{\partial \ell_\alpha}{\partial h_{\alpha\alpha}}=1$, $\dfrac{\partial \ell_\alpha}{\partial h^R_{jk}}=\dfrac{\partial \tilde{\ell}_\alpha}{\partial h^I_{jk}}=0$ ($j=k=\alpha$ を除く)

$\dfrac{\partial^2 \tilde{\ell}_\alpha}{\partial (h^R_{\alpha j})^2}=\dfrac{\partial^2 \tilde{\ell}_\alpha}{\partial (h^I_{\alpha j})^2}=\dfrac{2}{\lambda_\alpha-\lambda_j}$ ($j\neq\alpha$)

その他の2階微分$=0$

これより次の Taylor 展開が成り立つ。

(2,4) $\dfrac{\tilde{\ell}_\alpha}{n}=\lambda_\alpha\left(\dfrac{h_{\alpha\alpha}}{n}-\lambda_\alpha\right)+\dfrac{1}{2!}\sum_{j\neq\alpha}\dfrac{2}{\lambda_\alpha-\lambda_j}\left\{\left(\dfrac{h^R_{\alpha j}}{n}\right)^2+\left(\dfrac{h^I_{\alpha j}}{n}\right)^2\right\}+\cdots\cdots$

§3 固有根の分布の漸近展開

S を Wishart 分布 $W_p(n,\Sigma)$ に従う行列とする。Δ を correction factor として $m=n-2\Delta$ ($\Delta=O(1)$) とおく。$(S/m-\Sigma)\sqrt{m}$ が $m\to+\infty$ のとき平均 0 の正規分布に従うことから $f(S/m)$ の Taylor 展開

(3,1) $f(S/m)=\left[\mathrm{etr}\left(\frac{S}{m}-\Sigma\right)\partial\right]f(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\Sigma}$

ただし $\partial=\left(\frac{1}{2}(1+\delta_{\gamma\delta})\frac{\partial}{\partial\gamma_{\gamma\delta}}\right)$ を用いて次の展開が成り立つ。

Lemma 3.1. $T=(S/m-\Sigma)\sqrt{m}$ とおく A を任意の p 次対称行列とするとき $E[\mathrm{etr}(itAT)f(S/m)]=\mathrm{etr}\{-t^2(A\Sigma)^2\}[1+$

(3.2.) $\dfrac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{2}d_{2j-1}(it)^{2j-1}+\dfrac{1}{m}\sum_{j=0}^{3}g_{2j}(it)^{2j}+O\left(\dfrac{1}{m\sqrt{m}}\right)]f(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\Sigma}$

ただし $d_1=\mathrm{tr}(2\Sigma A\Sigma\partial+2\Delta\Sigma A)$

$d_3=\frac{4}{3}\mathrm{tr}(\Sigma A)^3$

(3.3.) $g_0=\mathrm{tr}(\Sigma\partial)^2+2\Delta\,\mathrm{tr}(\Sigma\partial)$

$g_2=4\mathrm{tr}(\Sigma A)^2\Sigma\partial+2\Delta\,\mathrm{tr}(\Sigma A)^2+\frac{1}{2}d_1^2$

$g_4=2\mathrm{tr}(\Sigma A)^4+d_1d_3$

$g_6=\frac{1}{2}d_3^2$

さて$l_\alpha(S)$の分布を考えるには$\Sigma=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$としてよい.
λ_αが単根のときTaylor展開(2.2.)より

(3.4.) $$\left(\frac{l_\alpha(S)}{m}-\lambda_\alpha\right)\sqrt{m}=\sqrt{m}\left(\frac{s_{\alpha\alpha}}{m}-\lambda_\alpha\right)+\frac{\sqrt{m}}{2!}\sum_{j\neq\alpha}\left(\frac{s_{\alpha j}}{m}\right)^2\frac{2}{\lambda_\alpha-\lambda_j}+O_p\left(\frac{1}{m}\right)$$

であるから$(l_\alpha(S)/m-\lambda_\alpha)\sqrt{m}$の特性関数は

(3.5.) $$E\left[exp\left\{it\sqrt{m}\left(\frac{1}{m}s_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha\right)\right\}\cdot\left\{1+\sqrt{m}\sum_{j\neq\alpha}\left(\frac{s_{\alpha j}}{m}\right)^2\frac{1}{\lambda_\alpha-\lambda_j}\right\}\right]+O(m^{-1})$$

Lemma 3.1.で$A=diag(0,\cdots,0,\alpha,0,\cdots,0)$ととれば

(3.6.) $$E\left[exp\left\{it\sqrt{m}\left(\frac{1}{m}s_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha\right)\right\}\right]=e^{-t^2\lambda_\alpha^2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{m}}\left\{2\Delta\lambda_\alpha it+\frac{4}{3}\lambda_\alpha^3(it)^3\right\}\right]+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

$f(\Gamma)=\sum_{j\neq\alpha}\gamma_{\alpha j}^2/(\lambda_\alpha-\lambda_j)$とおくことにより

(3.7.) $$E\left[\left(\sum_{j\neq\alpha}\frac{s_{\alpha j}^2}{m}\frac{1}{\lambda_\alpha-\lambda_j}\right)exp\left\{it\sqrt{m}\left(\frac{s_{\alpha\alpha}}{m}-\lambda_\alpha\right)\right\}\right]$$
$$=e^{-t^2\lambda_\alpha^2}\sum_{j\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_j}{\lambda_\alpha-\lambda_j}+O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

これよりl_αの分布の漸近展開が次のように求まる。

Theorem 2.1. $\tau=\sqrt{2}\lambda_\alpha$とおく。$\Phi(x)$を標準正規分布の分布関数,
$\Phi^{(j)}(x)$をその導関数とする。Σの固有根λ_αが単根のとき

(3.8.) $$P\left(\sqrt{m}\left(\frac{l_\alpha}{m}-\lambda_\alpha\right)/\tau<x\right)=\Phi(x)-\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\left\{2\Delta\lambda_\alpha\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{j\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_j}{\lambda_\alpha-\lambda_j}\right\}\Phi^{(1)}(x)/\tau+\frac{4}{3}\lambda_\alpha^3\Phi^{(3)}(x)/\tau^3\right]+O(m^{-1})$$

Hを複素Wishart分布$\tilde{W}_p(n,\tilde{\Sigma})$に従う正値Hermite行列とする。
$T=\sqrt{m}(H/m-I)$とおく。Hermite行列$\Gamma=(\gamma_{rs}^R+i\gamma_{rs}^I)$に対して微分
operatorを (3.9.) $\tilde{\partial}=\left(\frac{1}{2}(1+\delta_{rs})\frac{\partial}{\partial\gamma_{rs}^R}+\frac{i}{2}(1-\delta_{rs})\frac{\partial}{\partial\gamma_{rs}^I}\right)$ とおく
このとき$f(H/m)$のTaylor展開はHayakawa[4]により次のようにかける。 (3.10.) $\left[etr(H-\Lambda)\tilde{\partial}\right]f(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\Lambda}$

Lemma 3.1.に対応して

Lemma 3.2. $m=n-\Delta'$, A を任意の P 次 Hermite 行列とするとき (3.11.)

$$E[\mathrm{etr}(itAT)f(H/m)]=\mathrm{etr}\{-\tfrac{1}{2}t^2(A\tilde{\Sigma})^2\}$$
$$\Big[1+\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{2}d_{2j-1}(it)^{2j-1}+\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2}q_{2j}(it)^{2j}+O\Big(\frac{1}{m\sqrt{m}}\Big)\Big]f(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\tilde{\Sigma}}$$

ただし d_j, q_j は *Lemma* 3.1. において $\Delta\to\Delta/2$　$\Sigma A\to\tilde{\Sigma}A/2$, $\Sigma\partial\to\tilde{\Sigma}\tilde{\partial}/2$, $\mathrm{tr}\to 2\mathrm{tr}$ とおきかえたものである。

$\tilde{\Sigma}$ の α 番目に大きい固有根を λ_α としそれが単根とする。$\sqrt{m}(\tilde{l}_\alpha(H)/m-\lambda_\alpha)$ の特性関数を考えて *Lemma* 3.2. を使えば次の漸近展開が得られる。

Theorem 3.2. H を複素 Wishart 分布 $\tilde{W}_p(n,\tilde{\Sigma})$ に従う Hermite 行列とする。H の α 番目に大きい固有根を $\tilde{l}_\alpha$ とする。$\tilde{\Sigma}$ の固有根 λ_α が単根のとき

$$P\Big(\sqrt{m}\Big(\frac{\tilde{l}_\alpha}{m}-\lambda_\alpha\Big)\Big/\tau<x\Big)=\Phi(x)-\frac{1}{\sqrt{m}}\Big[\Big\{\Delta'\lambda_\alpha+\sum_{j\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_j}{\lambda_\alpha-\lambda_j}\Big\}\Phi^{(1)}(x)/\tau+\frac{1}{3}\lambda_\alpha^3\Phi^{(3)}(x)/\tau^3\Big]+O(m^{-1}) \quad (3.12)$$

$l_\alpha(S)$ および $\tilde{l}_\alpha(H)$ の 3 次の導関数を求め漸近展開の $O(m^{-1})$ の項を求める計算が筆者[10]にある。$l_\alpha(S)$ の漸近正規性は Girshick[3] により求められている。λ_α が単根でないとき、上のように正規分布で漸近展開できないことは $p=2$ で $\Sigma=I$ のときを考えることによりわかる。このとき $(t_{rs})=\sqrt{n}(S/n-I)$ により (3.13.) $\sqrt{n}(l_1/n-1)=\frac{1}{2}(t_{11}+t_{22})+\frac{1}{2}\{(t_{11}-t_{22})^2+4t_{12}^2\}^{\frac{1}{2}}$

と表わされ $n\to+\infty$ のとき t_{11}, t_{22} は $N(0,2)$ に t_{12} は $N(0,1)$ にそれぞれ独立に従うことから $\sqrt{n}(l_1/n-1)$ の極限分布が

$$(3.14)\quad \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{1}{2}u^2}+u\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}u}e^{-t^2}dt\right)\quad(-\infty<u<+\infty)$$

となることがわかる。$P=2$ の場合 Sugiyama[12] は(1,1)を用いて n,Σ を与えたとき $P(l_1/n<x)$ の正確な値を計算している。Theorem 3.1.より 漸近展開から近似値を求めて比較すると 次のようになる。$m=n=40$ のとき l_1/n の上側 5% 点は Sugiyama[12] より 1.575473 である。

$$P\left(\frac{1}{n}l_1>1.575473\right)$$

	$\lambda_1=1.5$ $\lambda_2=0.5$	$\lambda_1=1.2$ $\lambda_2=0.8$	$\lambda_1=1.1$ $\lambda_2=1.0$	$\lambda_1=1.5$ $\lambda_2=1.4$
$O(1)$の項	0.4109	0.0809	0.0266	0.4110
$O(n^{-1/2})$の項	−0.0058	0.0442	0.0814	0.5813
$O(n^{-1})$の項	−0.0006	−0.0121	−0.0688	−0.1053
Total	0.4045	0.1130	0.0392	0.8870
exact value	0.4045	0.1177	0.0920	0.6802

§4 Zonal 多項式に対する偏微分方程式

S を $P\times P$ 正値対称行列とする。正整数 k の分割 $\kappa=\{k_1,\cdots,k_p\}$ $k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 0$, $k_1+\cdots+k_p=k$ に対応する S の zonal 多項式を $C_\kappa(S)$ とする。S の固有根を $y_1\geq\cdots\geq y_p$ とし $Y=diag(y_1,\cdots,y_p)$ とおく。James[6] は $C_\kappa(S)=C_\kappa(Y)$ が次の偏微分方程式を満すことを示した。

(4.1.) $$\left\{\sum_{i=1}^{p} y_i^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{y_i y_j}{y_i - y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} - a_1(\kappa)\right\} C_\kappa(Y) = 0$$

ただし $a_1(\kappa)=\sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha(k_\alpha-\alpha)$ これは後に Muirhead [8] らによる超幾何関数の偏微分方程式を導くのに基礎となった方程式である。James [6] は metric $tr(S^{-1}dS)^2$ に対する Laplace-Beltrami operator の固有値を計算することにより上の方程式を得ている。筆者は昨年の多変量解析シンポジウムで James の方法を modify することにより Hermite 行列に対する zonal 多項式 $\tilde{C}_\kappa(Y)$ について

(4.2.) $$\left\{\sum y_i^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 2\sum_{i \neq j} \frac{y_i y_j}{y_i - y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} - \tilde{a}_1(\kappa) - k\right\} \tilde{C}_\kappa(Y) = 0$$

を導いた。ただし $\tilde{a}_1(\kappa)=\sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha(k_\alpha-2\alpha)$ とする。ここでは漸近展開の立場からこれらの方程式の別証明を与える。$f(S)$ の Taylor 展開 (3.1.) を用いて

(4.3.) $$n^{np/2}\left\{|\Sigma|^{n/2}\Gamma_p\left(\tfrac{1}{2}n\right)2^{\frac{np}{2}}\right\}^{-1}\int_{S>0}|S|^{(n-p-1)/2}\,\mathrm{etr}\left(-\tfrac{n}{2}\Sigma^{-1}S\right)\cdot f(S)\,dS$$
$$=\left[1+\frac{1}{n}tr(\Lambda\partial)^2+\frac{1}{6n^2}\{3(tr(\Lambda\partial)^2)^2+8tr(\Lambda\partial)^3\}\right]f(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\Lambda}+O(n^{-3})$$

ただし $\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$, λ_α は Σ の α 番目に大きい固有根とする。$f(S)=C_\kappa(S)$ とおけば Constantine [1] による Γ 型積分公式

(4.4.) $$|R|^t\int_{S>0}\mathrm{etr}(-RS)|S|^{t-\frac{p+1}{2}}C_\kappa(ST)\,dS=\Gamma_p(t,\kappa)C_\kappa(TR^{-1})$$

を使って (4.3.) の左辺は $\left(\frac{1}{2}n\right)_\kappa C_\kappa\left(\frac{2}{n}\Lambda\right)$ となる。これを n について展開することにより Fujikoshi [2] は

(4.5.) $$tr(\Lambda\partial)^2 C_\kappa(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\Lambda}=a_1(\kappa)C_\kappa(\Lambda),$$
$$[3\{tr(\Lambda\partial)^2\}^2+8tr(\Lambda\partial)^3]C_\kappa(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\Lambda}=\{3a_1(\kappa)^2-a_2(\kappa)+k\}C_\kappa(\Lambda)$$

を得た。ただし $a_2(\kappa)=\sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha(4k_\alpha^2-6\alpha k_\alpha+3\alpha^2)$ $\Gamma=(\gamma_{ij})$ とすれば (4.6.) $\operatorname{tr}(\Lambda\partial)^2=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2\frac{\partial^2}{\partial\gamma_{ii}^2}+\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j\frac{\partial^2}{\partial\gamma_{ij}^2}$

$C_\kappa(\Gamma)$ は Γ の固有根 $\gamma_1,\cdots,\gamma_p$ の関数とみなせるから Lemma 2.1. より (4.7.)

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_{ij}}=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\gamma_{ij}}\frac{\partial}{\partial\gamma_\alpha}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\gamma_{ij}^2}=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial^2\gamma_\alpha}{\partial\gamma_{ij}^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\gamma_\alpha}+\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\gamma_{ij}}\frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\gamma_{ij}}\frac{\partial^2}{\partial\gamma_\alpha\partial\gamma_\beta}$$

$\Gamma=\Lambda$ として $\frac{\partial}{\partial\gamma_{ij}}=0\quad(i\neq j)\qquad\frac{\partial}{\partial\gamma_{ii}}=1$

(4.8.)
$$\frac{\partial^2}{\partial\gamma_{ij}^2}=\frac{2}{\lambda_i-\lambda_j}\frac{\partial}{\partial\gamma_i}+\frac{2}{\lambda_j-\lambda_i}\frac{\partial}{\partial\gamma_j}\quad(i\neq j)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\gamma_{ii}^2}=\frac{\partial^2}{\partial\gamma_i^2}$$

これを(4.6.)に代入すれば(4.5.)より James の方程式(4.1.)を得る。Hermite 行列 $\tilde{\Gamma}$ に対する zonal 多項式についても同様の議論により Hayakawa [4] は

(4.9)
$$\operatorname{tr}(\Lambda\tilde{\partial})^2\tilde{C}_\kappa(\tilde{\Gamma})\big|_{\tilde{\Gamma}=\Lambda}=(\tilde{a}_1(\kappa)+k)\tilde{C}_\kappa(\Lambda)$$
$$[3\{\operatorname{tr}(\Lambda\tilde{\partial})^2\}^2+8\operatorname{tr}(\Lambda\tilde{\partial})^3]\tilde{C}_\kappa(\tilde{\Gamma})\big|_{\tilde{\Gamma}=\Lambda}$$
$$=\{3\tilde{a}_1(\kappa)^2-2\tilde{a}_2(\kappa)+6\tilde{a}_1(\kappa)(k-1)+3k^2-2k\}C_\kappa(\Lambda)$$

を得ている。ただし $\tilde{a}_2(\kappa)=2\sum_{\alpha=1}^{p}k_\alpha(k_\alpha^2-3\alpha k_\alpha+3\alpha^2)$, Λ は $\tilde{\Gamma}$ の固有根 λ_α を対角元にもつ対角行列とする。

$$\operatorname{tr}(\Lambda\tilde{\partial})^2=\sum_i\lambda_i^2\frac{\partial^2}{\partial\gamma_{ii}^2}+\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j\left\{\frac{\partial^2}{\partial(\gamma_{ij}^R)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(\gamma_{ij}^I)^2}\right\}$$

および $\tilde{\Gamma}=\Lambda$ のとき Lemma 2.2. から(4.8.)が γ_{ij} の代りに γ_{ij}^R を使っても γ_{ij}^I を使っても成り立つことから方程式(4.2.)を得る。(4.5.)の第2の微分式および(4.9.)の第2の微分式を同様の論法でかきかえると我々は新しい4階の偏微分方程式を得るが

それには $\ell_\alpha(S)$, $\tilde{\ell}_\alpha(H)$ の3次微分と4次微分の一部が必要になり Lemma 2.1. および Lemma 2.2. をもっと詳しくしなければならない。計算が少し面倒になり、得られた方程式もかなり長いものになる。これらのことは筆者[10]に述べてあるのでここでは省略する。

References

[1] Constantine,A.G.(1963). Some non-central distribution problems in multivariate analysis. Ann.Math.Statist. 34 1270-1285.

[2] Fujikoshi,Y.(1970). Asymptotic expansions of the distributions of test statistics in multivariate analysis. J.Sci.Hiroshima Univ.Ser.A-I 34 73-144.

[3] Girshick,M.A.(1939). On the sampling theory of roots of determinantal equations. Ann.Math.Statist. 10 203-224.

[4] Hayakawa,T.(1970). The asymptotic distributions of the statistics based on the complex gaussian distribution. Mimeo Series NO.654 Univ.of North Carolina

[5] Hirakawa,F.(1973). Note on the distribution of the minimum latent root. Ann.Inst.Statist.Math. 25 165-172.

[6] James,A.T.(1968). Calculation of zonal polynomial coefficients by use of the Laplace-Beltrami operator. Ann.Math.Statist. 39 1711-1718.

[7] Khatri,C.G.(1972). On the exact finite series distribution on the smallest or the largest root of matrices in three situations. J.Multivariate Analysis 2 201-207.

[8] Muirhead,R.J.(1970). Systems of partial differential equations for hypergeometric functions of matrix argument. Ann.Math.Statist. 41 991-1001.

[9] Muirhead,R.J.(1970). Asymptotic distributions of some multivariate tests. Ann.Math.Statist. 41 1002-1010.

[10] Sugiura,N.(1973). Derivatives of the characteristic root of a symmetric or a Hermitian matrix with two applications in multivariate analysis. Communications in Statist. 1 393-417.

[11] Sugiyama,T.(1967). On the distribution of the largest root of the covariance matrix. Ann.Math.Statist. 38 1148-1151.

[12] Sugiyama,T.(1972). Percentile points of the largest latent root of a matrix and power calculations for testing hypothesis $\Sigma=1$. J.Japan Statist.Soc. 3 1-8.