数理解析研究所講究録
第198巻 1974年 1-8

Convexityの一般化

Kuiper

京大 数研 成木勇夫 記

ここでの目的は、tight imbedding の概念を convexity の一般化として捉えることにある。また、この概念と total absolute curvature の最小性との関係についても若干述べる。

先ず D を E^N の compact subset とする。そのとき、

N次元 euclid 空間

(*) D: convex $\Longleftrightarrow$ E^N のすべての閉半空間 H に対して H $\cap$ D は empty か contractible である。

が成立つ。この事実を少し違った角度から眺めて、convexity を拡張して見よう。M を compact 空間とし、$f: M \hookrightarrow$ (又は $\looparrowright$) E^N を imbedding (又は immersion) とする。与えられた E^N 上の linear form z と real number c とに対して

$$(z\circ f)_c = \{\ x \in M \ ;\ z\circ f(x) \le c\ \}$$

f が imbedding のとき

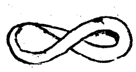
とおく。そうすると、(1) は「Im f : convex $\Longleftrightarrow$ $\forall z \forall c$ に対して $(zf)_c$ は empty 又は contractible」ということに他ならない。

（ここで Im f : convex ならば、M の位相は最も簡単なものであることに注意しておく。）そこで、M が contractible でないようなときの convexity の拡張として、次の定義を導入する。

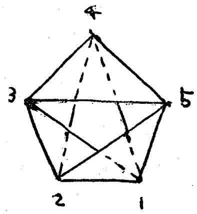
f : tight $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall z\ \forall c$ に対して、$(zf)_c$ は（M の位相から考えて）必要以上に複雑でない。

むろん「必要以上に複雑でない」ということを厳密にしなければならないが、その前に二、三の例について説明して見よう。

<u>例1</u>. M = 2次元の帯 。これが homotopy circle であることを考えて、上の「必要以上に複雑でない」ということを ① empty、或は ② contractible、或は ③ homotopy circle であるとする。このとき E^2 への tight imbedding は convex set からその内部の convex set を抜いたようなものしかない。E^3 への tight imbedding の例としては cylinder の表面  がある。これをふくらませた  はもう tight ではない。

<u>例2</u>. M = Möbius の帯 。これも homotopy circle だから tight の定義は上と同様とする。$f: M \hookrightarrow E^4$ の例として次のようなものがある。$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ を E^4

内の或る4次元単体の頂点とし、3角形 (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 1), (5, 1, 2) を順につなげば、これは Möbius band の triangulation であり、容易に分るようにこれは M の E^4 への tight imbedding を与えている：



(E^3 へ適当に project したもの)。

逆に E^4 への tight imbedding で、どのような3次元 subspace にも含まれないようなものは、上のようなものしかないことも判る。

例3. $M = S^n$。この例では「必要以上に複雑でないということは ① empty ② contractible ③ homotopy n-sphere のどれかであると言う意味にしておかねばならない。このときは次の定理が得られる。「f を S^n の E^N への tight immersion とすると、E^N の $(n+1)$次元 subspace (E^{n+1} とかく) があって、

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & E^N \\ & E^{n+1} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

となり、$f(S^n)$ は E^{n+1} 内の convex body の境界となっている。」この定理は、微分幾何の二、三の定理の一般化となっている。$n=1$ のときは Fenchel の定理「E^2 内の C^2級閉曲線 C に対して $\int_C |\rho\, ds| \geq 2\pi$（$\rho$：曲率，$ds$：弧長微分）となり、等号が成立つのは C が convex body の境界であるとき、又、そのときに限る。」の拡張であり、$n=2$ のときは Chern-Lashof の定理「E^3 の、S^2 に C^2- diffeomorphic な C^2-級閉曲面 S に対して $\int_S |K\, d\sigma| \geq 4\pi$（$K$：Gauss曲率，$d\sigma$ 面積要素）となり、等号が成立つのは S が convex body の境界であるとき、又、そのときに限る。」の拡張になっている。等号が成立のは C 又は S の natural imbeddings が tight であるときに限るからである。このことは次の等式から考えて明らかである：S を E^{n+1} 内の C^2 級閉超曲面とし、K：Gauss 曲率、$d\sigma$：面要素，$f: S \hookrightarrow E^{n+1}$ を natural imbedding とすれば

$$(2) \qquad \int_S |K\, d\sigma| = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \# cr.(z\circ f)\, d\sigma_z \,。$$

但し、unit vector z は内積によって E^{n+1} 上の linear form と考え、$\# cr.(zf)$ は zf の critical points の数とし、又 $d\sigma_z$ は単位球 $|z|=1$ 上の面要素とする。（$|z|=1$ 上の measure 0 の集合を除いて $z\circ f$ は Morse function であることに注意する。）

さて上の公式(2)を念頭におくと、tight の定義において「$\forall z$ $\forall c$ に対して $(zf)_c$ が必要以上に複雑でない」というところを

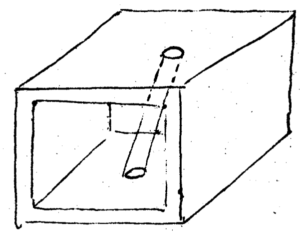
(*) 殆どすべての E^N の unit vector z に対して zf の critical points の数が最少値をとる。

とするのが、一番もっともらしい。以後 tightness をこのように定義する。

再び公式(2)にもどって次のような問題を考えよう。S を2次元 closed manifold とするとき、$f : S \hookrightarrow E^3$ によって、K, $d\sigma$ を S 上に定義すれば (2)によって

$$\frac{1}{2\pi}\int_S |K\, d\sigma| \geqq 4-\chi \qquad \chi : S \text{ の Euler characteristic}$$

この式で等号をとり得るかどうかは一般に open problem である。$S = S^1 \times S^1$ のとき肯定的、$RP(2)$ については否定的。又、non-orientable でも、次のようなものに対しては肯定的：



例4. $\mathbb{R}P(2)$ を E^5 へ tight に imbed しよう. 写像 h

$$S^2 \ni (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2) \in E^6$$

を考えると、$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $h(x)=h(-x)$ であるから、これは次のように分解される：

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & E^6 \\ \mathbb{R}P(2) \arrow[r, hook, "f"] & E^5 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

この f が代数幾何における Veronese map である. f は確かに tight である. これは（殆どすべての E^3 上の）non-degenerate quadratic form は S^2 上 6 個の critical points（符号を除いて 3 個）をもつことから判る. 又、tight なものはこのようなものしかない. 一般に「M を n 次元 closed manifold, $f: M \hookrightarrow E^{\frac{1}{2}n(n+3)}$ を smooth, tight とすると, $M=\mathbb{R}P(n)$ f は Veronese である」(W. Pohl) が知られている.

与えられた closed manifold が tight imbedding を許すかどうか、については、次の定理が得られている

定理. M が $(p-1)$-connected, closed $2p$-manifold であるとし、又 M が ~~Euclid空間~~ E^N への tight imbedding を許すとする。このとき次のどちらかが成立つ:

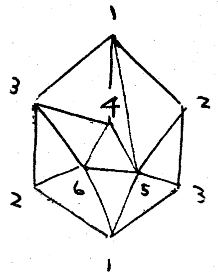
① $N-2p=1$ or 2 (この場合 M : parallelizable).

② M の中で self-intersection-number 1 の S^p がある (この場合 $2p=4, 8, 16$)

この定理をつかえば、tight imbedding を許さない manifolds の例を大量につくることができる。例えば S^9 上の S^9 (又は S^9 exotic) bundle はそのような例である。

最後に、例4に関連して、次の予想を述べておく:

予想. $f: RP(2) \hookrightarrow E^5$ を topological tight imbedding とすると、f は Veronese であるか、次のような piecewiselinear な imbedding であろう：



（1, 2, 3, 4, 5, 6は 5次元単体の頂点）．