数理解析研究所講究録
第200巻 1974年 56-65

Partial geometry の分類について

東大 理 榎本彦衛

点と直線から成る系で次の条件を満たすものを (r, m, t) 型の partial geometry と呼びます。

(1) 異なる2点を通る直線は高々1本しかない。

(2) 各点を r 本の直線が通る。

(3) 各直線上には m 個の点がある。

(4) 直線とその上にない点に対し、その点を通りその直線と交わる直線が t 本ある。

この定義は点と直線について対称的なので、(r, m, t) 型の partial geometry の点と直線をとりかえると (m, r, t) 型の partial geometry になります。また

$t = 1 \iff$ generalized quadrangle

$m = t \iff 2-(*, m, 1)$ デザイン

$r = m = t \iff$ 射影平面

$r-1 = m = t \iff$ アフィン平面

となることに注意して下さい。

<u>定理1</u> (Bose [1]) (r, m, t) 型の partial geometry の2点に対し、その2点を通る直線が存在する時隣接していると定義すると、$m > t$ の時次のようなパラメータを持った強正則グラフが得られる。

$$k = r(m-1),$$
$$l = (r-1)(m-1)(m-t)/t,$$
$$\lambda = (r-1)(t-1) + m - 2,$$
$$\mu = rt.$$

r が小さい partial geometry を分類するという問題を考えてみます。

$t \leqq r$ に注意すると、$r = 2$ の時の分類は容易にできます。

<u>定理2</u> $(2, m, 1)$ 型の partial geometry は各 m に対し存在して unique (triangular association scheme に対応するもの)。$(2, m, 2)$ 型の partial geometry も各 m に対し存在して unique (L_2-association scheme に対応するもの)。

$r=3$ の partial geometry はたくさんありますが、その中で
$t=1$ のものは有限個しかありません。

<u>定理3</u>（Shult [3] Lemma 3.3）$(3, m, 1)$ 型の partial geometry は $m = 2, 3, 5$ の時にのみ存在して unique である。

$(3, m, 2)$ 型の partial geometry は次のようにしてつくることができます。

G を位数 m のループとします。G の元 a に対し

$$L_1(a) = \{ (a, b) \mid b \in G \},$$
$$L_2(a) = \{ (b, a) \mid b \in G \},$$
$$L_3(a) = \{ (b, ba) \mid b \in G \}$$

と定義し、

$$\mathcal{L}_i = \{ L_i(a) \mid a \in G \},$$
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$$

とおきます。

$G \times G$ を点の全体、$\mathcal{L}$ を直線の全体と定義してできる幾何を $\widetilde{\pi}(G)$ とおきます。

<u>定理4</u>　$\widetilde{\pi}(G)$ は $(3, m, 2)$ 型の partial geometry

になる。逆に、$(3, m, 2)$ 型の partial geometry はすべてこのようにして得られる。

<u>証明</u>：$\widetilde{\pi}(G)$ が $(3, m, 2)$ 型の partial geometry になることは定義からすぐに確かめられる。

逆に $(3, m, 2)$ 型の partial geometry が与えられたとする。点の全体を $\mathcal{P}$，直線の全体を $\mathcal{L}$ とおく。$L \in \mathcal{L}$ を1つ固定して考える。L の点に $(1,1), \cdots\cdots, (m, m)$ という名前をつける。$(1,1)$ を通る L 以外の直線を $L_1(1)$, $L_2(1)$ とおく。(a, a) を通り、$L_i(1)$ と交わらない直線を $L_i(a)$ と呼ぶことにする。$L_1(a)$ と $L_2(b)$ は必らず交わるので、その交点に (a, b) という名前をつける。最後に、$(1, a)$ を通る $L_1(1)$, $L_2(a)$ 以外の直線を $L_3(a)$ と呼ぶことにする。

$G = \{1, 2, \cdots\cdots, m\}$ とおき、$L_1(a)$, $L_2(c)$, $L_3(b)$ が一点で交わるとき $ab = c$ と定義すると、G はこの積に関し 1 を単位元とするループになる。そして明らかに最初与えられた partial geometry は $\widetilde{\pi}(G)$ になっている。

<u>注意</u>：$\widetilde{\pi}(G)$ と $\widetilde{\pi}(G')$ が同型な partial geometry であっても、G と G' が同型になるとは限らないが、G が群ならば G' も G と同型な群になることがわかる。

$\widetilde{\pi}(G)$ から定理1のようにしてつくった強正則グラフを

$\pi(G)$と書くことにします.

__定理5__（Enomoto [2]） 全自己同型群が点上 primitive rank 3 group として働くような $(3, m, 2)$ 型の partial geometry は $\tilde{\pi}(\mathbf{Z}_5)$, $\tilde{\pi}(E_{2^f})$ $(f \geqq 2)$ だけである。

__系6__ 全自己同型群が primitive rank 3 group として働くような，$k = 3(m-1)$，$l = (m-1)(m-2)$ の強正則グラフは，$m > 23$，$m \neq 352$ ならば，$m = 2^f$ という形をしている時にのみ存在して，それは $\pi(E_{2^f})$ と同型になる。

2-(*, 3, 1) デザインは Steiner triple system とも呼ばれており，たくさん存在することが知られている．したがって $(3, m, 3)$ 型の partial geometry の分類は望み薄であるが，全自己同型群に条件をつければ定理5と同様の結果は得られる．

__定理7__ 2元体上の d次元 射影幾何の点と直線をとりかえたものは $(3, 2^d - 1, 3)$ 型の partial geometry であって，その全自己同型群は点上 primitive rank 3 group になっている．逆に，全自己同型群が点上 primitive rank 3 group として働くような (3, m, 3) 型の partial geometry は $m \neq 12$ ならば $m = 2^d - 1$ $(d \geqq 3)$ という形の時にのみ存在して、それは射影幾何からつくったものと同型になる.

証明: (3, m, 3) 型の partial geometry からつくった

$$k = 3(m-1),$$

$$\lambda = m+2,$$

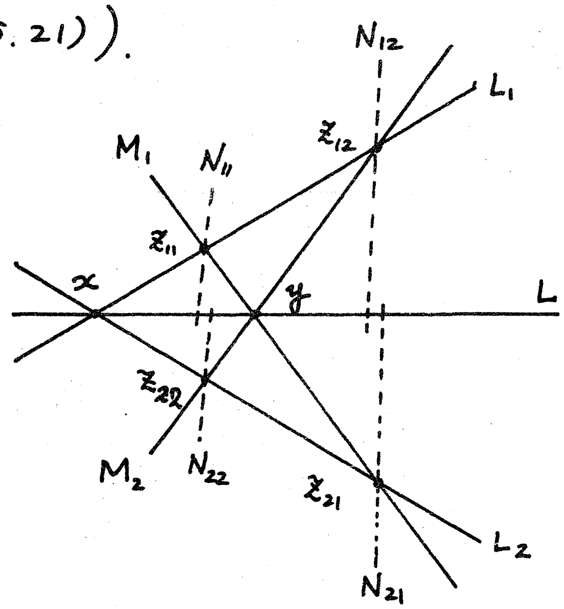
$$\mu = 9$$

の強正則グラフ (Ω, Δ) を考える. ($x \in \Omega$ と隣接している点の全体を $\Delta(x)$ で表わす.) $y \in \Delta(x)$ の時の $\Delta(x) \cap \Delta(y)$ 内の辺の数を α, $z \in \Omega - \Delta(x) - \{x\}$ の時の $\Delta(x) \cap \Delta(z)$ 内の辺の数を β とすると,

$$(*) \qquad \alpha + \frac{k-\lambda-1}{\mu} \cdot \beta = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$$

という関係がある ([4] (5.21)).

x と y を通る直線を L, x を通る他の 2 直線を L_1, L_2, y を通る他の 2 直線を M_1, M_2, L_i と M_j の交点を z_{ij} とおくと,



$$\Delta(x) \cap \Delta(y)$$

$$= (L - \{x, y\}) \cup \{z_{ij}\}$$

となる。z_{ij} を通る L_i, M_j 以外の直線を N_{ij} とすると、

$$\alpha - \frac{(m-2)(m-3)}{2} - 8 = \begin{cases} 0 & N_{12} \neq N_{21},\ N_{11} \neq N_{22} \\ 1 & N_{12} = N_{21},\ N_{11} = N_{22} \\ & \text{の一方だけが成り立つ} \\ 2 & N_{12} = N_{21},\ N_{11} = N_{22} \end{cases}$$

となることがわかる。

$$\alpha = \frac{(m-2)(m-3)}{2} - 8$$

とすると、(*) より

$$\beta = 18 + \frac{9}{m-3}$$

となる。β は整数であるから、

$m = 4, 6, 12$

のいずれかになるが、$m = 4$ とすると $k = \mu$ となり、primitive という仮定に反する。また、$m = 6$ とすると $k = 15$, $l = 10$ となるが、26 次の primitive rank 3 group は存在しない ([5])。また、

$$\alpha = \frac{(m-2)(m-3)}{2} + 9$$

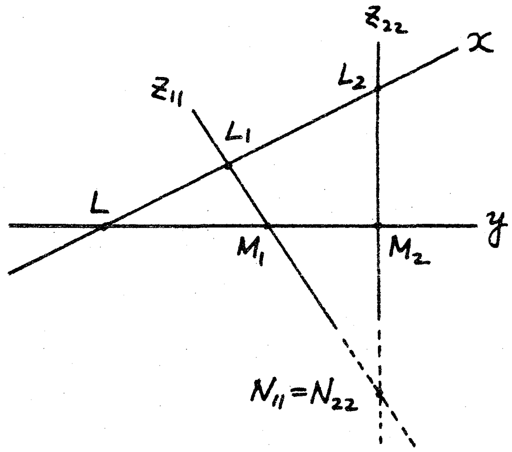
とすると、(*) より

$$\beta = \frac{9(4m-11)}{2(m-3)}$$

となるが、これは整数にならないので矛盾である。最後に

$$\alpha = \frac{(m-2)(m-3)}{2} + 10$$

となる場合を考える。この時、点と直線をとりかえて考えると、"x, y を点 L を通る2直線、L_1, L_2 を L と異なる x 上の点、M_1, M_2 を L と異なる y 上の点とすると、L_i と M_i を通る直線 z_{ii} $(i=1,2)$ は $N_{11} = N_{22}$ で交わる" ということになる。すなわち、



射影幾何になっている。しかも $m \neq 3$ ならば、次元は3以上となり、$m = 2^d - 1$ という形をしていなくてはならない。

<u>注意</u>：$m = 12$ の場合にも存在しないと思われるが、まだきちんとは確かめていない。

<u>系8</u> 全自己同型群が primitive rank 3 group として働くような $k = 3(m-1)$, $l = 2(m-1)(m-3)/3$ の強正則グラフは $m > 33$, $m \neq 147$ ならば、$m = 2^d - 1$ という形をしている時にのみ存在して、それは定理7のようにして

つくったものと同型になる。

かなり前に定理7を証明していたのですが、そのことを忘れていたため研究集会の時には $(3, m, 3)$ 型の partial geometry については何もわかっていないようなことを言ってしまいました。このこと、および $m = t$ の partial geometry と $2-(*, m, 1)$ デザインが同じものであることを注意して下さった大阪大学の野田，加納両氏に感謝します。これに伴ない、原稿は全面的に書き改めました。

文 献

[1] R.C. Bose, Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs, Pacific J. Math. 13 (1963), 389-419.

[2] H. Enomoto, Strongly regular graphs and finite permutation groups of rank 3, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971), 381-397.

[3] E. Shult, Characterizations of certain classes of graphs, J. Combinatorial Theory (B) 13 (1972), 142-167.

[4] M.D. Hestenes - D.G. Higman, Rank 3 groups

and strongly regular graphs, Computers in algebra and number theory (1971), 141–159.

[5] L.L. Scott, Uniprimitive permutation groups, Theory of finite groups (edited by Brauer and Sah), Benjamin (1969), 55–62.