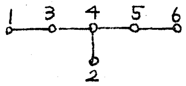
数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 81-84

(E_6)型単連結有限 Chevalley 群の共役類について

東大 理　　水野 賢三

G, $\bar{G}$ をそれぞれ標数 p の有限体 F_q とその代数閉包 K 上の (E_6) 型単連結 Chevalley 群, $\bar{H}, \bar{U}, W, \Sigma$ (ルート系), Π (基底) 等記号については〔1〕に準ずるものとする。特に, $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$ を図形が



となる様に定める。H, U を $\bar{H}, \bar{U}$ に対応する G の部分群とする。ここでは共役類を決定する方法について述べることは止め、結果のみを記す。

p'-元については次の結果がある。

定理 (〔2〕)　G の p' 元の共役類と $(\bar{H}/W)_\sigma$ (σ は $\bar{G}$ の Frobenius 同型) の元とは 1 対 1 に対応し, $\Gamma(w,S)=\{h\in\bar{H} \mid w(h)=\sigma(h),\ Z_W(h)=W_S\}$ ($S \subsetneq \Pi\cup\{$最低ルート$\}$, $w\in W$ s.t. $w(S)=S$) の元に対応する G の共役類の元 h に対し

$$Z_G(h)\cong \bar{H}(w)\,\langle \mathfrak{X}_{\pm S}\rangle_{\sigma^{-1}w}$$

となる。ここで $\bar{H}(w)=\{m\in\bar{H} \mid w(m)=\sigma(m)\}$ とする。

この定理に従って各 $\Gamma(w,S)$ に対応する共役類の数を決定したが, 単に $\Gamma(w_{1234}w_{2456}w_{3456}w_{12344556}, \{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_2,$ 最低ルート$\})=\phi$ であ

った。

p 元の代表系とその中心化群の位数は次の通りである。

$\chi_1(1)$	$(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)q^{36}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)$	$2(q^3-1)^2(q^2-1)^2q^{26}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_\delta(\zeta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_{245}(1)\chi_{23445}(\eta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)$	$(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{33}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)$	$(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{19}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)(q-1)q^{26}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)^2q^{31}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{15}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{19}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)$	$(3,q-1)(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{25}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(2,p)(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{245}(\eta)$	$2(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_{245}(1)$	$6(q-1)^2q^{18}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_{-\delta}(\zeta)$	$2(q^2-1)q^{18}$
$\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{1345}(1)\chi_{1233445}(\eta)$,	$2(q^2-1)q^{18}$

$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_2(1)\chi_{1234456}(1)\chi_{\delta-\alpha_2}(\tau)$ (但し $(3,q-1)=1$)	$3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{-\delta}(\lambda)\chi_2(1)$,	$3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)$	$(3,q-1)(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)$	$3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)$	$3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_2(1)\chi_6(1)$	$(q-1)q^{15}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_2(1)$	$(3,q-1)(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_2(1)$	$3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_2(1)$	$3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1)$	$(2,p)(q-1)q^9$
$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_{345}(\eta)$	$2(q-1)q^9$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{134}(1)$	$(q-1)q^{13}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_\delta(\zeta)$	$2(3,q-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_\delta(\lambda\zeta)$	$6q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_\delta(\lambda^2\zeta)$	$6q^{12}$
$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(1)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\eta)$,	$2(q-1,3)q^{12}$
$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\lambda\eta)$,	$6q^{12}$
$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda^2)\chi_{234}(1)\chi_{2345}(\lambda^2\eta)$,	$6q^{12}$

$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(1)x_{345}(1)$	$2(3,q-1)q^{12}$
$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(\lambda)x_{345}(1)$	$6q^{12}$
$x_{13}(1)x_{24}(1)x_{56}(1)x_{34}(1)x_{45}(\lambda^2)x_{345}(1)$	$6q^{12}$
$x_2(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{13}(1)x_{345}(1)$	$(3,q-1)q^8$
$x_2(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{13}(1)x_{345}(\lambda)$	$3q^8$
$x_2(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{13}(1)x_{345}(\lambda^2)$	$3q^8$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)$	$(2,p)(3,p)(3,q-1)q^6$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{2345}(\tau)$ (但し $p=3$)	$3q^6$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{2345}(-\tau)$ (但し $p=3$)	$3q^6$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(1)x_6(1)x_{234}(\eta)$	$2(3,q-1)q^6$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda)x_6(1)$	$3(2,p)q^6$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda^2)x_6(1)$	$3(2,p)q^6$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda)x_6(1)x_{234}(\eta)$	$6q^6$
$x_1(1)x_2(1)x_3(1)x_4(1)x_5(\lambda^2)x_6(1)x_{234}(\eta)$	$6q^6$

記号について

$x_{i_1\cdots i_k}(t)=x_{\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}}(t)$ ，δ：最高ルート

η：F_q^* $(p=2)$ の元で $X^2+X+\eta$ が F_q 上既約多項式となる元の1つ。

τ：F_q^* の元で $X^3-X+\tau$ が F_q 上の既約多項式となる元の1つ

λ：F_q^* の非立方元の1つ。(特に $(3,q-1)=3$)

ζ：F_q^* の非平方元の1つ。(特に $p\neq 2$)

p 元の中心化群の構造も比較的容易に得られる。$\bar{G}$ に於ては，p-元の共役類の個数は標数と無関係に一定であり20個である。F_4 型については，$p=2$ の時が19個，$p\neq 2$ の時は15個，G_2 型については $p=3$ の時が5個，$p\neq 3$ の時には4個であるこ

とにより．一般に．代数閉体上の Chevalley 群の unipotent class の数は、標数がルートの長さの2乗の比と異なる時には一定で体の取り方に寄らない様に思われる。（[3],[4],[5],[6]）

参照

1. R. Steinberg : Lecture on Chevalley groups. Yale Univ (1967)
2. 〃 : Endomorphisms of Linear Algebraic Groups. Menoir 80. A.M.S. (1968)
3. B. Chang : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2). J. Alg 9 (1968)
4. H. Enomoto : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of char 2 or 3. J.F.S. Univ of Tokyo. (1970)
5. K. Shinoda : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char 2. (to appear)
6. T. Schoji : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char $\neq 2$. (to appear)