数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 85-97

有限 Chevalley 群の Bruhat 分解と unipotent elements について

阪大 理　川中宣明

K を元数 q の有限体，G を K に係数をもつ有限 Chevalley 群とする。簡単のために，以下 G を untwisted と仮定するが一般の quasi-simple groups of Lie type に対しても同様の議論が展開できる．次のような G の二種類の分解を考える：

$$(1)\qquad G = \bigcup_{w \in W} BwB \qquad (\text{Bruhat 分解}),$$

$$(2)\qquad G = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} G^{s} \qquad ,$$

ここに，B，W はそれぞれ G の Borel subgroup および Weyl group で $\mathcal{S}$ は G の semisimple conjugacy classes 全体，G^{s} は semisimple part の conjugacy class が s であるような G の元全体を意味する．（1），（2）というふたつの分解（ともに disjoint）は，全く系統が違うにもかかわらずお互に密接に関係していることが少し実験をしてみるとわかる．ここでは，その方向への第一歩として G^{1}（$=G$ の unipotent elements 全体）と Bruhat 分解（1）との関連を考える．

§1. Hecke algebra $H_{\mathbb{C}}(G, B)$（復習）

本節の内容は，N. Iwahori : On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Tokyo Univ. 10 (1964) からの引用．G の B についての Hecke algebra $H_{\mathbb{C}}(G, B)$ は，G 上の複素数値関数 f で

$$f(bgb') = f(g) \qquad (g \in G;\ b, b' \in B)$$

を満たすもの全体のなす vector space に convolution による積：$(f_1 * f_2)(g) = |B|^{-1} \sum_{x \in G} f_1(gx^{-1}) f_2(x)$

を入れたものとして定義される．言いかえると G の群環 $\mathbb{C}G$ の subalgebra $e(\mathbb{C}G)e$，ここに $e = |B|^{-1} \sum_{b \in B} b$，である．permutation representation 1_B^G の commuting algebra として定義することもできる．$w \in W$ に対して，BwB の characteristic function を $\mathcal{S}(w)$ と書くことにする．これらは $H_{\mathbb{C}}(G, B)$ の vector space としての base をなす．$\{w_i\}_{i=1}^{\ell}$ を W の simple reflections の全体とし，$1 = \mathcal{S}(1)$, $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}(w_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ とおくと $\{1, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots, \mathcal{S}_\ell\}$ は algebra $H_{\mathbb{C}}(G, B)$ を生成する．$H_{\mathbb{C}}(G, B)$ 内の積は次式を満たす：

$$(3)\begin{cases} \mathcal{S}(w_i)\mathcal{S}(w) = \mathcal{S}(w_i w) & (\ell(w_i w) > \ell(w) \text{ のとき}) \\ \mathcal{S}_i^2 = q \cdot 1 + (q-1)\mathcal{S}_i & (i = 1, 2, \cdots, \ell), \end{cases}$$

但し, $l(w)$ は $\{w_i\}_{i=1}^{l}$ による w の最短表示の長さである. $Hc(G, B)$ が, 次式で定義される involutive automorphism ∧ を持つことも知られている:

(3) $\hat{\mathcal{S}}_i = (q-1)\cdot 1 - \mathcal{S}_i = -q\,\mathcal{S}_i^{-1}$

(従って, $\hat{\mathcal{S}}(w) = (-1)^{l(w)} q^{l(w)} \mathcal{S}(w^{-1})^{-1}$.)

§2. polynomials $F_{w,w'}(t)$

定理1. w, w' を Weyl 群 W の任意の元, $\mathcal{S}(w)$ を §1 で定義した $Hc(G, B)$ の元とする. 次のような polynomials $F_{w,w'}(t)$ が (たゞひとつ) 存在する:

(4) $\hat{\mathcal{S}}(w) = \sum_{w'\in W} F_{w,w'}(q)\,\mathcal{S}(w')$ $(q=|K|)$,

とくに, w のひとつの reduced decomposition を $s(w) = (s_1, s_2, \cdots, s_m)$ ($m=l(w)$, s_i は simple reflections) とすると $F_{w,1}(t)$ は次式で与えられる.

(5) $F_{w,1}(t) = \sum_{i\in I_{s(w)}} t^{l(i)/2}(t-1)^{l(w)-l(i)}$,

ここに, $I_{s(w)}$ は, 次の条件(a)(b)(c) を満たすような数列 $i = (i_0, i_1, i_2, \cdots, i_k)$ の全体とする:

(a) $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq m = l(w)$,

(b) $s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_k} = 1$ (但し $s_{i_0} = 1$ としておく),

(c) $\quad \ell(s_{i_0}s_{i_1}\cdots s_{i_h}) < \ell(s_{i_0}s_{i_1}\cdots s_{i_h}s_r)$

$$i_h+1 \le r \le i_{h+1}-1 \quad , h=0,1,2,\cdots,k-1.$$

また，$I_{s(w)} \ni \bar{i}=(i_0,i_1,\cdots,i_k)$ に対して $\ell(\bar{i})=k$ とおく．┘

注意 1. $\ell(\bar{i})$ は偶数または 0 （$\bar{i}\in I_{s(w)}$）．

注意 2. $F_{w,1}(t)$ の degree は $\ell(w)$．$F_{w,1}(t)$ は符号を除いて自己相反的，即ち t^p の係数を $b_p(w)$ と書くと，

$b_p(w)=(-1)^{\ell(w)}b_{\ell(w)-p}(w) \quad (p=0,1,2,\cdots,\ell(w))$．

他の polynomials $F_{w,w'}(t)$ も符号を除いて自己相反的．┘

例 1. w が Coxeter element of W なら $F_{w,1}(t)=(t-1)^\ell$ （ℓ は simple roots の個数）．

2. W を G_2 型．w を W の長さ最大の元とすると，

$$F_{w,1}(t)=t^6-2t^5+2t^4-2t^3+2t^2-2t+1.$$

3. W を A_3 型．w を W の長さ最大の元とすると，

$$F_{w,1}(t)=t^6-3t^5+4t^4-4t^3+4t^2-3t+1$$ ┘

§3. G の unipotent elements

U を B の maximal unipotent subgroup．w_ℓ を W の長さ最大の元とする．

定理 2. w を W の任意の元とし $S(w)=(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ を w のひとつの reduced expression とすると，

(a) $B w B \cap w_L U w_L^{-1} = \bigcup_{\bar{i} \in I_{S(w)}} \mathcal{U}_w(\bar{i})$ (disjoint)

ここに，$I_{S(w)}$ は定理 1 において定義した通りとし，$\mathcal{U}_w(\bar{i})$ ($\bar{i}=(i_0, i_1, i_2, \cdots, i_k)$) は次のような $x \in w_L U w_L^{-1}$ の全体とする：

(7) $x = g_1 g_2 \cdots g_m \quad (m = \ell(w))$

但し，$g_j = x_{-\alpha_j}(t)$, $t \in K^*$; $j \notin \{i_1, i_2, \cdots i_k\}$

$g_j = s_j x_{\alpha_j}(t)$, $t \in K$; $j \in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$

かつ $\ell(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}}) < \ell(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_p})$ $(j = i_p)$,

$g_j = s_j$; $j \in \{i_1, i_2 \cdots, i_k\}$ かつ

$\ell(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}}) > \ell(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_p})$ $(j = i_p)$.

(α_j は simple reflection s_j に対応する simple root $x_{\alpha_j}(t)$ 等は，それに対応する root subgroup.)

(b) $\mathcal{U}_w(\bar{i})$ の元に対する表示 (7) は unique. 従って

(8) $|B w B \cap w_L U w_L^{-1}| = F_{w,1}(q)$ ⌟

系. $\sum_{w \in W} F_{w,1}(t) = t^N$, 但し $N = \ell(w_L) = G$ の positive roots の個数. ⌟

予想 1. 定理2(b)は次のように一般化できるであろう：
w_1 と w_2 を $\overline{W}$ の任意の二元とすると，

$$|\{Bw_1B \cap w_2Bw_2Bw_2^{-1} \text{内の unipotent elements}\}|$$
$$= F_{w_1,1}(q)\cdot F_{w_2,1}(q).$$

(定理2(b)は $w_2 = 1$ なる特別の場合.)⌟

G の任意の unipotent element は($\overline{U}$ に conjugate な)ある maximal unipotent subgroup に含まれる．G の Bruhat 分解(1)と $N_G(\overline{U}) = B$ より $\overline{U}$ に conjugate な subgroup は，$uw'\overline{U}w'^{-1}u^{-1}$ ($u \in \overline{U}$, $w' \in \overline{W}$)と書ける．$BwB \cap uw'\overline{U}w'^{-1}u^{-1}$ は次の簡単な補題と定理2からわかる．

補題 1. $BwB \cap uw'\overline{U}w'^{-1}u^{-1}$
$$= (BwB \cap uw_L\overline{U}w_L^{-1}u^{-1} \cap uw'\overline{U}w'^{-1}u^{-1})\cdot(\overline{U} \cap uw'\overline{U}w'^{-1}u^{-1})$$
かつ，右辺の形への分解は unique.⌟

定理2と補題1.を用いて次のことを証明することができる．

定理 3. w を $\overline{W}$ の任意の元とする．BwB に含まれる unipotent elements の個数は，$q^N F_{w,1}(q)$ である．ここに，N は G の positive roots の個数.⌟

定理2の系とあわせると，GのBruhat分解より，

<u>系.</u> Gのunipotent elementsの個数は，q^{2N}. ⌟

この事実は，R.SteinbergがEndomorphisms of linear algebraic groups (Memoirs of the A.M.S., 1968)においてSteinberg characterの値を用いて証明している．なお，この節の終りの部分で系の簡明なinterpretationを与える．

定理3は次のように一般化できる．

<u>定理4.</u> $B' = w_L B w_L^{-1}$ (即ちBにoppositeなBorel subgroup)とおき，PをBを含むparabolic subgroup，P'をB'を含みPにoppositeなparabolic subgroup，U_Pおよび$U_{P'}$をPとP'のunipotent radicalとする．Gのsubset X内のunipotent elements全体の集合を$V(X)$と書くことにすると，Weyl群Wの任意の元w, w_1に対して，

(9) $q^{n(P,w_1)}|V(w_1 P w_1^{-1} \cap BwB)|$

$= q^{n(P',w_1)+N(P')} \sum_{w' \in W} F_{w,w'}(q) |V(w_1 U_{P'} w_1^{-1} \cap Bw'B)|$

および

(10) $q^{n(P,w_1)+N(P)} |V(w_1 U_P w_1^{-1} \cap BwB)|$

$= q^{n(P',w_1)} \sum_{w' \in W} F_{w,w'}(q) |V(w_1 P' w_1^{-1} \cap Bw'B)|$

が成立する．但し $N(P)$ $(= N(P'))$ はPのreductive partのpositive rootsの個数で $n(P, w_1)$ 等は，$q^{n(P,w_1)} = |w_1^{-1} U w_1 \cap P|^{-1} \times |U|$ (UはBのunipotent radical)で定義されるnonnegative integersである. ┘

'opposite'という言葉については, Borel-Tits: I.H.E.S. 1965, 参照.

とくに $P=G$ なら $P'=G$, $U_P=U_{P'}=\{e\}$, $N(P)=N(P')=N$ $n(P,w_1)=n(P',w_1)=1$ で, 定理4の(9)は定理3と同じになる($w_1U_{P'}w_1^{-1}\cap Bw'B=\phi$ となることに注意).

この節の残りの部分ではHecke algebraとは関係がないが, 上記諸定理と同様の考察から導れるいくつかの結果を述べることにする. まず定理2と補題1から次のことが証明できる:

<u>定理5</u>. (a) BwB の中に含まれるregular unipotent elementsの個数は $q^{N-l+l(w)}(q-1)^l$. ここに, l は simple roots の個数.
(b) 従って G 内の任意の右(又は左) B-剰余類は, すべて同じ個数 ($=q^{N-l}(q-1)^l$) の regular unipotent elements を含んでいる. ┘

regular unipotent elementsの定義等については, Springer-Steinberg: Conjugacy classes (Seminar on alg. gr. and related finite gr., Springer, 1970 の Part E) を参照.

定理3と同様の証明で次のことがわかる.

<u>定理6</u>. (a) $\mathbb{G}$ を K 上定義された connected semisimple (or reductive) linear algebraic group とし, $\mathbb{V}=\mathbb{V}(\mathbb{G})$ を $\mathbb{G}$ の unipotent elements 全体のなす variety とする ($\mathbb{V}$ が K 上定義されていることは知られている). 次のような K-subvarieties $\mathbb{V}_i$,

K-isomorphisms φ_i (as varieties) が存在する：

$$\mathcal{V} = \bigcup_i \mathcal{V}_i \quad (\text{有限個の}\mathcal{V}_i\text{の disjoint union})$$

$$\varphi_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow A^{2N} = 2N\text{次元 affine space}$$

$$A^{2N} = \bigcup_i \varphi_i(\mathcal{V}_i) \quad (\text{disjoint union}).$$

(b) 従って $\mathcal{V}$ の K-rational points の個数は q^{2N}. ┘

定理7. (a) G を定理6の通りとし，$\mathfrak{g}$ をその Lie algebra とする. $\mathfrak{g}$ の nilpotent elements 全体のなす K-variety を $\mathfrak{V}$ と書くと，上と同様に K-subvarieties $\mathfrak{V}_i$，k-isomorphisms ψ_i が存在して，

$$\mathfrak{V} = \bigcup_i \mathfrak{V}_i \ (\text{disjoint}),\ \psi_i : \mathfrak{V}_i \longrightarrow A^{2N}$$

$$A^{2N} = \bigcup_i \psi(\mathfrak{V}_i) \ (\text{disjoint}).$$

とすることができる.

(b) とくに，$\mathfrak{V}$ の K-rational points の個数は q^{2N} ┘

定理6は定理3系の interpretation を与える. 定理7(b)は，Steinberg-Springer の上で引用した論文では，K の標数 p が "good" の時に証明してある. 定理6，7は，そこで出されていた問題への解答である.

§4. character theory との関連

§1で述べたように Hecke algebra $H_{\mathbb{C}}(G, B)$ は G の群環 $\mathbb{C}G$ の subalgebra $e(\mathbb{C}G)e$ $(e = |B|^{-1}\sum_{b\in B} b)$ と同一視できる。permutation representation 1_B^G の(必ずしも既約でない) constituents は、すべて $H_{\mathbb{C}}(G, B) = e(\mathbb{C}G)e$ 内の左 ideal として実現される。$H_{\mathbb{C}}(G, B)$ の involutive automorphism $\wedge$ (§1参照)は、irreducible constituent を irreducible constituent にうつす。とくに $(1_G)^\wedge = St._G$、また P を parabolic subgroup とすると $(1_P^G)^\wedge = St._P^G$; ここに $St._P$ は P の Steinberg character (P の reductive part の Steinberg character を unipotent radical の上では trivial になるよう拡張したもの) である。

$A(G)$ を G 上の complex valued class functions の全体とし、$\mathbb{C}$-linear map $f: H_{\mathbb{C}}(G, B) \longrightarrow A(G)$ を次式によって定義する:

$$(11)\quad [f(S(w))](g) = \frac{|BwB \cap \mathcal{C}(g)|}{|\mathcal{C}(g)|} \quad (w \in W, g \in G)$$

但し、$\mathcal{C}(g)$ は G における g の共役類。

定理3と定理4から次のことが、証明できる。

<u>定理8</u>. 任意の $\xi \in H_{\mathbb{C}}(G, B)$ と parabolic subgroup P に対し、

$$(12)\quad \sum_u [f(\xi)](u)[1_P^G](u) = \sum_u [f(\hat{\xi})](u)[St._P](u),$$

とくに $P=G$ のとき，

$$(12') \qquad \sum_u [f(\xi)](u) = q^N [f(\hat{\xi})](1),$$

但し，sum $\sum_u$ は G の unipotent elements 全体にわたるものとする．┘

1_B^G に含まれる irreducible characters は f による像の中に入っていることが，一般論からわかるので，定理8から次のことがわかる．

<u>定理</u>9. χ を 1_B^G に含まれる irreducible character とすると，

$$(13) \qquad \sum_u \chi(u)[1_P^G](u) = \sum_u \hat{\chi}(u)[St_P^G](u)$$

とくに $P=G$ のとき，

$$(13') \qquad \sum_u \chi(u) = q^N \cdot \hat{\chi}(1) \quad .┘$$

<u>注意</u>3. (13′) において $\chi = 1_G$ とすると $\hat{\chi} = St.$ の次元は q^N だから，(13′) はこの場合，定理3の系と同じことを言っていることになる．

<u>注意</u>4. (13) において $P=B$ とした式から次式がでる：

$$\sum_{x \sim t} \chi(x)[1_B^G](x) = \sum_{x \sim t} \hat{\chi}(x)[1_B^G](x) \quad ,$$

ここに，t は fix された semisimple conjugacy class of G で両辺の和は，semisimple part の conjugacy class が t であるような G の元全体にわたる．同様な式が B 以外の parabolic subgroup に対しても成立するはずである．次のより強い予想にも相当の信頼性があると思う．

予想 2. χ_1，χ_2 を 1_B^G に含まれる（既約）指標とし，t を G の任意の semisimple conjugacy class とすると，

$$(14)\qquad \sum_{x_s \sim t} \chi_1(x)\chi_2(x) = \sum_{x_s \sim t} \hat{\chi}_1(x)\,\hat{\chi}_2(x).$$

定理 9 は (14) の $t=1$ の場合のそのまた特殊な場合に過ぎない．一般の t の場合の証明には新しいアイデアが必要である．

注意 5. I.G. Macdonald は，(13′) と似た式：

$$(15)\qquad \sum_u \chi(u) = (q\text{のべキ}) \times \chi(1)$$

が，G のすべての既約指標に対して成立することを予想した．1_B^G に含まれる既約指標のうち $\chi(1)$ と $\hat{\chi}(1)$ がわかっている場合には (13′) を用いて (15) が正しいことを確めることができる．

注意 6. $G = GL_n(K)$ のときは，J. A. Green の結果 (Trans. A.M.S., 80, 1955) を使うと $\chi \longrightarrow \hat{\chi}$ なる対応が（必ずしも 1_B^G に含まれない）任意の既約指標に対して自然に定義できて (14) が成立することがわかる．但しこのとき，χ が既約なら $\hat{\chi}$ は既約指標又はその (-1) 倍である．同様のことが一般の有限 Chevalley 群にまで拡張できるかもしれない．

最後に，定理5を用いて，

<u>定理</u>10. χ を 1_B^G に含まれるような G の nontrivial な irreducible character とすると，

$$\sum_{u \in G_r^1} \chi(u) = 0 ,$$

但し G_r^1 は，G 内の regular unipotent elements 全体とする.

（実際には，任意の regular unipotent element u に対して $\chi(u) = 0$ となるのではないかと思うが，まだ考えていない.）

今の所，序で述べた分解 $G = \bigcup_{\delta \in S} G^\delta$ と Bruhat 分解との間に何故関係があるのか，少しもわからないがこの方面を掘り下げていくことは G の character や conjugacy class を理解する上で重要な意味を持つのではないかと思う.

以上