数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 101-105

4重可移群の分類について

大教大　大山　豪

1. 現在迄に知られている4重可移群は 対称群 S_n $(n \geqq 4)$, 交代群 A_n $(n \geqq 6)$ 及び Mathieu 群 M_n $(n=11, 12, 23, 24)$ である。

今迄に4重可移群についていろいろ調べてきたが, いまだ分類できそうにない。永尾, 野田, 大山による *On multiply transitive groups* I〜XI において次の様な結果を得た.

以下　G : $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上の4重可移群

X を G の部分集合とするとき

$I(X) = \{ i \in \Omega \mid$ すべての $x \in X$ に対して $i^x = i \}$ とす.

(定理 1)

$G = S_5, A_6, M_{11}$ を除き $|I(G_{1234})| = 4$ である

(定理 2)

P を G_{1234} の 2 シロー群とす. $G = A_6, A_7, M_{11}, M_{23}$ を除き $|I(P)| = 4$ 又は 5 である。

2. 最近次の結果を得た.

以下 t を G の *involution* の固定点の個数の最大数とす。即 $n-t$ は G の 2 シロー群の *minimal degree* である。

（定理 3）

ある t 個の点の G における *stabilizer* の 2 シロー群 Q で, $N(Q)^{I(Q)} = A_t$ 又は S_t なる Q が存在すれば, G は知られたものすべてに限る。

証明は多少長たらしいが. 考へ方は次による。
$n<35$ のときの 4 重可移群は知られている故. G を $n \geqq 35$, $G \neq A_n$ で仮定をみたす最小次数の群とす。

今 $N(Q)^{I(Q)} = S_t$ とす

$$x_i = (1)(2)\cdots(2i-2)(2i-1\ \ 2i)(2i+1)\cdots(t)\cdots$$

なる $N(Q)$ の元が存在し, $\langle Q, x_1, x_2, \cdots, x_k \rangle$ ($k=\frac{t}{2}$ 又は $\frac{t-1}{2}$) は 2-群をなすとしてよい。

$R=\langle Q, x_1, x_2, \cdots, x_i \rangle$ は $\Omega - I(Q)$ 上 *semi-regular* と仮定する。このとき $\Omega - I(Q)$ 上の R- *orbit* の長さは $2^i \cdot |Q|$ である。x を $I(Q)$ 上互換のみを高々 i 個もつ $N(Q)$ の任意の 2-元とす。$N(Q)^{I(Q)} = S_t$ 故 R は $\langle Q, x \rangle$ に共役な部分群を含む. 従って x は $\Omega - I(Q)$ 上に固定点をもたない。今 $\langle R, x_{i+1} \rangle$ が $\Omega - I(Q)$ 上

semi-regular でないとす。即 $x_{i+1} \in N(R)$ 故 x_{i+1} は $\Omega - I(\Theta)$ 上のある R-orbit Γ を固定するとす。すると Γ 上に固定点をもつ $\langle R, x_{i+1} \rangle$ の元($\neq 1$)は $x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta$ の元で高々 $|\Theta|$ 個である。$x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta$ の元は $I(\Theta)$ 上 $i+1$ 個の互換のみよりなる故，固定点の個数に関する仮定より Γ 上高々 $2(i+1)$ 個の固定点をもつ。

$\langle R, x_{i+1} \rangle$ の元 x に対し $\alpha(x) = |I(x) \cap \Gamma|$ とおくと

$$\sum_{x \in \langle R, x_{i+1} \rangle} \alpha(x) = |\langle R, x_{i+1} \rangle| = 2^{i+1} \cdot |\Theta|$$

一方 $\quad$ 左辺 $= \alpha(1) + \sum'_{x \in x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta} \alpha(x) \leqq 2^{i} \cdot |\Theta| + 2(i+1)|\Theta|$

$$\therefore \ 2^{i+1} \leqq 2(i+1)$$

$$\therefore \ i \leqq 3$$

従って $\langle \Theta, x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ が $\Omega - I(\Theta)$ 上 semi-regular であることを証明することにより，$\langle \Theta, x_1, x_2, \cdots, x_k \rangle$ は $\Omega - I(\Theta)$ 上 semi-regular となる。($n - t \equiv 2 \pmod 4$ のときは $\langle \Theta, x_1, x_2, \cdots, x_k \rangle$ は $\Omega - I(\Theta)$ 上に長さ2の orbit を1つもち，残りの点の集合の上で semi-regular を示す)。

しかし Θ の involution

$$a = (1)(2) \cdots (t)(i\ j)(k\ l) \cdots$$

に対して a と可換な G_{ijkl} の involution u をとると $u^{I(\Theta)} \neq 1$ で，u は $\Omega - I(\Theta)$ 上に固定点を4つ以上もち矛盾を得る。

$N(\Theta)^{I(\Theta)} = A_t$ のときは上の x_i を $I(\Theta)$ 上互換2つよりなる元として同様な方法を用いて証明される。

次の補題の証明はむつかしくはない。

(補題)

QをΩの任意のt個の点のGにおける*stabilizer*の2-群とすると $N(Q)^{I(Q)} \neq M_{12}$ である。

この補題と定理3より次の事を容易に得る

(系4)

nを偶数，PをG_{1234}の2シロー群$(\neq 1)$，$Z(P)$をPの中心とする。

(1) $I(P)=I(Z(P))$ とすれば $G=S_n\ (n \geqq 6)$，$A_n\ (n \geqq 8,\ n \equiv 0 \pmod 4)$ 又は M_{12} である

(2) $\Omega - I(P)$ の任意の点iに対してP_iが$\Omega - I(P_i)$上*semi-regular* $(\neq 1)$ であれば $G=S_8$，A_{10} 又は M_{24} である。

(1)は $|I(Q)|=t$ である2-群Qに対して $C(Q)^{I(Q)}$ は4重可移群で定理の仮定をみたしている事より証明される。

(2)は $N(P_i)^{I(P_i)}$ が又4重可移群で $I(P_i)$ の任意の4点の $N(P_i)^{I(P_i)}$ における*stabilizer*の2シロー群が*semi-regular*である事より証明される。

（系5）

PをG_{1234}の2シロー群（$\neq 1$）とす。Pが$\Omega - I(P)$上可移であれば，$G = S_n$（$n \geqq 6$，$n-4$又は$n-5$が2巾），A_n（$n \geqq 8$，$n-4$又は$n-5$が2巾），M_{12}又はM_{23}である。

これは次の様にして証明される．nが奇数のときは定理1及び2よりGは5重可移群になる．従ってnは偶数としてよい．このときPは系4の(1)の仮定をみたす。

3．以上より5重可移群あるいは4重可移群の決定は次の問題に帰着されるかも知れない

（問題1）

系2よりnが偶数で$I(P) \supset I(Z(P))$のときのGを求めよ．これができれば5重可移群は決る

（問題2）

定理3より$|I(Q)| = t$なる2-群Q（$< G_{ijkl}$）でWittの仮定（Gの元gで$Q^g < G_{ijkl}$ならば$Q^g = Q^h$なるG_{ijkl}の元hが存在する）をみたすQが存在する事が云えれば$N(Q)^{I(Q)} = M_{24}$の場合を除き4重可移群は決る．$N(Q)^{I(Q)} = M_{24}$の場合は困難ではないと思う。