数理解析研究所講究録
第205巻 1974年 1-14

退化した放物型方程式

京大 理　猪狩勝寿

§.1 序論

Kowalewskian type の方程式に対するコーシー問題の適切性（$\mathcal{E}$-適切, あるいは L^2-適切）に関しては, 多くの優れた研究が発表され, その結果双曲性という概念が明確にされてきた。それに比べ, Kowalewskian でない方程式に対するコーシー問題の適切性に関しては, 変係数の場合, まだ未知のことが多いように筆者には思われる。（定係数の場合 Hadamard の条件が, 係数が t のみの函数の場合, Petrowsky の定理が適切（クラス $\mathcal{D}_{L^2}$ で）であるための必要十分条件として知られているが）。

この小論において, 次のような偏微分方程式に対するコーシー問題の適切性を, クラス $\mathcal{D}_{L^2}$ で, 考える。

(1)
$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - a\left(x,t;\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = f(x,t),$$

$$a\left(x,t;\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\nu|\le 2m} a_\nu(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu, \quad m \text{ は正の定数}, \quad x\in R^n,\ t\ge 0.$$

得られた結果は, §2の定理である。それは, "kowalewskian でない偏微分方程式に対するコーシー問題の適切性の条件を求める" という目的に対する小さな一歩でしかない。しかし, 作用素 $a(x,t;\partial_x)$ の楕円性が退化した場合の様相が, ある程度特徴ずけられていると思われる(特に条件(C.2))。

§2 コーシー問題の適切性(必要条件).

まず, 適切性の定義を与えよう。

__定義__(適切性). $f=0$ とする。(1)に対するコーシー問題がクラス $\mathcal{D}_{L^2}^\infty$ で適切であるとは, 次の(i)(ii)を満たすことである。

(i) 任意の $u_0(x)\in\mathcal{D}_{L^2}^\infty$ に対し, $u(x,0)=u_0(x)$ となる(1)の解 $u(x,t)\in\mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$ が一意的に存在し, かつ

(ii) 対応: $u_0(x)\longmapsto u(x,t)$ が, $\mathcal{D}_{L^2}^\infty$ から $\mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$ への連続写像である。

(1)に対するコーシー問題が適切であるためには, まず,

(2) $$\text{Real part } a_{2m}(x,0;i\xi)\leqq 0, \quad \forall x\in R^n, \forall \xi\in R^n$$

が必要である($a_k(x,t;i\xi)$ は $a(x,t;i\xi)$ の k次斉次部分)。これは溝畑教授の結果[1]の特別な場合である。我々の目的は, 更に精しい必要条件を求めることである。具体的に述べれば

__問題__ $a_{2m}(x,0;\partial_x)$ が退化したとき, 即ち ある $x_0\in R^n$, $\xi^0(\neq 0)\in R^n$ があって,

(3) Real part $a_{2m}(x_0,0;i\xi^0)=0$

となる場合，コーシー問題が適切であるために，低階にいかなる条件を課すべきか？

得られた結果は次のようなものである。

<u>条件 1</u>　$a(x,t;\frac{\partial}{\partial x})$ の主要部の係数は実数値函数.

<u>条件 2</u>（係数の滑らかさ）

$|\nu|=2m$ なら，$t \longmapsto a_\nu(x,t)\in\mathcal{B}^\infty_x$ は2回連続的微分可能.

$|\nu|\le 2m-1$ なら，$t\longmapsto a_\nu(x,t)\in\mathcal{B}^\infty_x$ は連続.

また，ξの斉次多項式 $h_2(x;\xi)$ を次式で定義する，

(4) $$h_2(x;\xi)=\sum_{|\mu|=2}\frac{1}{\mu!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\mu a_{2m}(x,0;\xi)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu a_{2m}(x,0;\xi).$$

次の定理が成立する。

<u>定理</u>　条件 1, 2 を仮定する。ある $x_0\in R^n$, $0\neq\xi^0\in R^n$ があって

(C.1) $$a_{2m}(x_0,0;i\xi^0)=0$$

(C.2) $$h_2(x_0,\xi^0)=0$$

(C.3) $$\frac{\partial a_{2m}}{\partial t}(x_0,0;i\xi^0)\ge 0$$

を満すなら，(1) に対するコーシー問題が，$t=0$ のある近傍で，クラス $\mathcal{E}^\infty_t$ で，適切であるためには，

(C.4) Real part $a_{2m-1}(x_0,0;i\xi^0)=0$

が必要である。

特に，$m\ge 2$ のときには，(C.3) を除いても正しい。

<u>注意.1</u>　定係数のときには，条件(C.2), (C.3) は自ずと満され，定理は，Hadamard の条件より直ちに従う。

<u>注意.2</u>　(2) を前提とすれば，条件(C.1)〜(C.4) はすべて，空間変数の正則な変換に対し，invariant である。

<u>注意.3</u>　条件(C.2) は $a_{2m}(x,0;\frac{\partial}{\partial x})$ の楕円性の退化の様相に関連している。例えば，$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は (C.2) を満し，$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は (C.2) を満さない。

証明の方針は，基本的には，溝畑[1] の方法に沿っている。紙数の都合で証明は割愛するが，近々 [5] が発表される予定であるので，参照されたい。その後，三宅氏が同様の問題を，他の観点から考察し，その結果が発表される筈である [6].

§.3　定理に関連するいくつかの例

条件.1 で，主要部が実係数としたが，次の竹内氏の例 [4] は一般的に言って，条件1 は落せないことを示している。

<u>例.1</u>　$a(x)$, $x\in R^1$, は実数値函数とする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\,a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f \tag{5}$$

に対するコーシー問題は，$a(x)\in \mathcal{B}^\infty \cap L^1$ ならば，$\mathcal{D}_{L^2}^{\infty}$-適切である。

$a(x)$ が 0 でない実定数ならば，コーシー問題は適切でないことは，Hadamard の条件より容易にわかる。だから，条件1を仮定せずに，各点的考察をするのは無理であると思われる。

つづいて，条件(C.2)が証明のための人為的条件ではない（初めはそうであったが）ことを次の例により示そう。

例 2　$a(x_1)$, $b(x_1)$ は $\mathcal{B}^\infty$ に属する x_1 のみの函数（実数値）で，$a(x_1) \geqq 0$, $a(0) = 0$, $a''(0) > 0$ であり，さらにある正定数 δ で $a(x_1) \geqq \delta \min(1, |x_1|^2)$ を満すものがあるとする。このとき，

(6) $$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a(x_1)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ib(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u(x,t) = f(x,t)$$

に対するコーシー問題は，もし

$$|b(0)|^2 < \frac{1}{2}a''(0)$$

を満すなら，$\mathcal{D}_{L^2}^\infty$-適切である。

この例は，定理において，条件(C.2)を満さなければ，条件(C.4)は必ずしも必要でないことを示している。

最後に，条件(C.3)の役割を明確にするために，$m=1$ でしかも，係数が t のみの函数である場合，即ち方程式

(7) $$\frac{\partial}{\partial t}u - \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum b_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(t)\right)u = f$$

を考えよう。係数は t の連続函数（$a_{jk}(t)$ が実数値でなくともよい）とする。Petrowsky の定理により，次の命題が得られる。

命題　ある $\xi^0(\neq 0)\in R^n$ に対し，正定数 C_1 および $\rho\,(>2)$ があり，$t=0$ のある近傍で

$$\int_0^t \mathcal{R}e \sum a_{jk}(s)\,\xi_j^0\xi_k^0\,ds \le C_1 t^\rho$$

が成りたてば，(7) に対するコーシー問題が $\mathcal{D}_{L^2}^\infty$-適切であるために

$$\mathcal{I}m \sum_{j=1}^n b_j(0)\,\xi_j^0 = 0$$

であることが必要である。逆にある正定数 C_2 があって

$$\int_0^t \min_{|\xi|=1} Re \sum a_{jk}(s)\,\xi_j\xi_k\,ds \ge C_2 t^2$$

が $t=0$ のある近傍でなりたてば，(7) に対するコーシー問題は，任意の低階に対して，$t=0$ のある近傍で，$\mathcal{D}_{L^2}^\infty$ で適切である。

附記

これまで，Kowalewskian でない偏微分方程式に対するコーシー問題の適切性を，必要条件の側から見てきたが，逆は？　勿論放物型方程式や Schrödinger 方程式が解けることは周知のことである。ここに，放物性が退化した方程式に対し，筆者の得た結果を併記し，参考に供する。それは，(7) に於て，特に $m=1$ の場合に限られており，$m\geq 2$ の場合は unknown である。最近阪大の堤氏が $m\geq 2$ の場合もこめて，一つの興味ある結果を得ておられる。しかし，以下に述べる結果と重複する点は少ないと思われる。最後に初期-境界値問題についても一言触れたい。

I. 非負形式をもつ 2階の偏微分作用素（退化した楕円型作用素）即ち, $\sum a_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)$, $\sum a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq 0$, に対する境界値問題の一般的考察は, Fichera に始まり, Oleinik, Kohn-Nierenberg 等により, 詳しく研究された。特に, O.A. Oleinik は, 退化した放物型方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - A\left(x,t;\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = f(x,t) \tag{a.1}$$

ここで, $A = \sum a_{jk}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x,t)$ であり

任意の x, ξ, t に対して

$$\sum a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \geq 0 \tag{a.2}$$

を仮定する。係数は滑らかな実数値函数とする。

に対するコーシー問題および第1種境界値問題の generalized solution の存在（一意的）定理を得た。

コーシー問題の generalized solution とは： $(x,t)\in \underset{\substack{\parallel \\ G}}{R^n\times[0,T]}$ で考える。$u_0(x)\in L^2(R^n)$ および $f(x,t)\in L^2(G)$ に対し

$$\iint u\left(-\frac{\partial}{\partial t}-A^*\right)\varphi\, dx\,dt = \iint f\varphi\, dx\,dt + \int u_0(x)\varphi(x,0)\,dx$$

を満す $u(x,t)\in L^2(G)$ のことである。ここで, $\varphi(x,t)$ は, $\varphi(x,T)=0$ となる有界な support をもつ, 任意の滑らかな函数とする。

また, 第1種境界値問題の generalized solution とは：

Ω を R^n 内の領域とし, その境界を $\partial\Omega$ とする。$(x,t)\in\Omega\times[0,T]$ ($\equiv G$ とおく)

で考える。$f(x,t)\in L^2(G)$ に対し，$\varphi(x,T)=0$，$\varphi(x,t)|_{\partial\Omega}=0$ となる有界な support を持つ任意の滑らかな函数 $\varphi(x,t)$ に対し

$$\iint u\left(-\frac{\partial}{\partial t}-A^*\right)\varphi\,dx\,dt=\iint f\varphi\,dx\,dt$$

を満す $u(x,t)\in L^2(G)$ のことである。A^* は A の formal adjoint を表わす。

上述の Oleinik の結果に対し，(a.1) を発展方程式とみて，解けないだろうかという疑問が生ずる。即ち，$\mathcal{E}_t^0(L^2)\cap\mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}'_{L^2})$ に解を求めることである。筆者の得た結果を次に述べる。

II. コーシー問題について

(a.1) に於て，$x\in R^n$，$t\geq 0$ とし，(a.2) と，さらに，次の条件を仮定する。

<u>条件.1</u>　$a_{jk}(x,t)$ は実数値函数であり，$\mathcal{E}_t^0(\mathcal{B}_x^2)$ に属する。さらに $b_j(x,t)$ は $\mathcal{E}_t^0(\mathcal{B}_x^1)$ に，$c(x,t)$ は $\mathcal{E}_t^0(\mathcal{B}_x^0)$ に属する。

<u>条件.2</u>　$\left|\mathrm{Im}\sum b_j(x,t)\xi_j\right|^2\leq \mathrm{const.}\sum a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k$

が任意の $(x,t,\xi)\in R^n\times[0,\infty)\times R^n$ に対して成りたつ。

<u>注意.</u>　条件 (a,2) は講畑の条件 (2) に対応する。また，われわれの定理の必要条件 (C.4) は条件 (2) により，保証される。しかし前述の例.2 は以下の結果には含まれない。

まず，エネルギー評価が成りたつ。

<u>命題 A.1</u>　$0\leq t\leq T,(T>0)$ とする。$f(x,t)\in\mathcal{E}_t^0(L_x^2)$ で，

$u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(L^2_x) \cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{-2})$ は (a,1) の解とする。このとき，$u(x,t)$ および $f(x,t)$ に無関係な定数 γ があって

(a.3) $$\|u(x,t)\|_{L^2_x} \leqq e^{\gamma t}\|u(x,0)\|_{L^2_x} + \int_0^t e^{\gamma(t-s)}\|f(s)\|\,ds$$

がなりたつ。

また，解の一意的存在を示す次の定理が得られる。

<u>定理 A.1</u>　任意の初期データ $u_0(x) \in L^2_x$ および $f(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(L^2_x)$ に対し，$u(x,0) = u_0(x)$ とする (a,1) の解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(L^2_x) \cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{-2})$ が一意的に存在する。

さらに，解の滑らかさに関する定理が得られる。但し，条件 1 は次の条件で置き変える。

<u>条件 1′</u>　$a_{jk}(x,t)$ は実数値函数で，$\mathcal{E}_t^0(\mathcal{B}_x^{m+2})$ に属し，$b_j(x,t)$ および $c(x,t)$ はそれぞれ $\mathcal{E}_t^0(\mathcal{B}_x^{m+1})$，$\mathcal{E}_t^0(\mathcal{B}_x^{m})$ に属する。ここで $m = 0, 1, 2, \cdots$.

(a,2)，条件 1′ および条件 2 を仮定すれば

<u>定理 A.2</u>　$u_0(x) \in \mathcal{D}_{L^2}^{m}$，$f(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^{m})$ とすれば，解 $u(x,t)$ は $\mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^{m}) \cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{m-2})$ に属する。

II. 初期-境界値問題について

R^n の中の閉じた超曲面 Σ で囲まれた内部又は外部領域を Ω とする。Σ の近傍で定義された滑らかな函数 $\varphi(x)$ があって，Σ は

$$\varphi(x)=0 \quad \text{on } \Sigma \quad (\text{但し } |\mathrm{grad}\,\varphi(x)|\neq 0)$$

で表わされるとする。さらに一般性を失うことなく

$$\varphi(x)<0 \quad \text{in } \Omega, \quad |\mathrm{grad}\,\varphi|=1 \quad \text{on } \Sigma$$

を仮定する。(a.1) において、A の係数は $\mathcal{B}^2(\Omega)$ に属する x のみの実数値函数とし、次の仮定をおく：

仮定1. $\sum a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqq 0, \quad x\in\Omega,\ \xi\in R^n$

仮定2. $\sum a_{jk}(x)\varphi^{(j)}(x)\varphi^{(k)}(x)\neq 0 \quad \text{on } \Sigma.$

まず、境界への trace について考えよう。

(a.4) $$\mathcal{D}(A)=\{u(x);\ u(x)\in L^2(\Omega),\ Au(x)\in L^2(\Omega)\}$$

$$\|u\|_{\mathcal{D}}^2=\|u\|^2+\|Au\|^2$$

とする。すると、次の命題が得られる。

命題 A.2 $\mathcal{D}(A)$ から $H^{-1/2}(\Sigma)\times H^{-3/2}(\Sigma)$ への線型写像

$$\gamma:\ u(x)\longrightarrow \left(\gamma(u),\ \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right)$$

で次の性質を満すものが、一意的に存在する。

(a) γ は連続写像

(b) 有界な support をもつ任意の $v(x)\in C^2(\bar{\Omega})$ に対し、Green の公式

$$(v,Au)-(A^*v,u)=\left\langle v,\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right\rangle_\Sigma+\langle bv,\gamma(u)\rangle_\Sigma-\left\langle \frac{\partial v}{\partial\nu},\gamma(u)\right\rangle_\Sigma$$

がなりたつ。ここで、$\frac{\partial}{\partial\nu}=\sum a_{jk}(x)\varphi^{(j)}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}$, $b=(b_j-a_{jk}^{(k)})\varphi^{(j)}(x)$.

注意 特に、$u(x)\in C^2(\bar{\Omega})\cap\mathcal{D}(A)$ のとき

$$\gamma(u)=u(x)\big|_\Sigma, \quad \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)=\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_\Sigma$$

が命題A.2より容易に従う。

この命題を土台にして，境界値問題（Dirichlet 又は Neumann）を考えよう。

$$\text{(a.5)}\quad \begin{aligned} \mathcal{D}_1(A) &= \{ u;\ u \in \mathcal{D}(A),\ \gamma(u) = 0 \} \\ \mathcal{D}_2(A) &= \{ u;\ u \in \mathcal{D}(A),\ \gamma(\tfrac{\partial u}{\partial \nu}) + \tfrac{1}{2} b\, \gamma(u) = 0 \} \end{aligned}$$

とおけば，次の命題を得る。

<u>命題 A.3</u>　A は $\mathcal{D}_i(A)$, $i = 1$ or 2，を定義域として，$L^2(\Omega)$ での閉作用素であり，ある β があって，$\lambda > \beta$ に対し，A のレゾルベント $(\lambda - A)^{-1}$ が存在し，しかも

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leqq \frac{1}{\lambda - \beta}, \qquad \forall \lambda > \beta$$

がなりたつ。

故に，Hille-Yosida の定理が適用されて，初期-境界値問題

$$\text{(I.B.P.)}\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - A(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \gamma(u) = 0 \quad \left(\text{又は}\ \gamma(\frac{\partial u}{\partial \nu}) + \frac{1}{2} b\, \gamma(u) = 0\right) \end{cases}$$

に対し，次の定理を得る。

<u>定理 A.3</u>　$f(t)$, $Af(t) \in \mathcal{E}_t^0(L^2)$ とする。任意の $u_0(x) \in \mathcal{D}_i(A)$, $i = 1$ or 2，に対し，初期-境界値問題 (I.B.P.) の解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^1(L^2(\Omega))$ が一意的に存在する。

これまで，証明なしに，定理を列挙してきた。証明には，我々は，mollifier を用いる。その際，作用素と mollifier のコミュテーターの処理が問題となる。なぜなら，我々は，2階の作用素を扱っており，もはや Friedrichs の補題は使えないから。しかし，それに代る次の補題（Friedrichs の補題の拡張）がこの問題を解決する。

<u>補題</u>　$\rho_\varepsilon *$ を Friedrichs の mollifier とする，その際特に $\rho(x)$ として偶函数を用いる。$a(x) \in \mathcal{B}^2(R^n)$ は実数値函数，$u(x)$ は $L^2(R^n)$ の元とすると，$|\nu| \leq 2$ に対し，次の (i), (ii) が成りたつ：

(i) $$\left| \mathrm{Re}\left(\rho_\varepsilon * u,\ [\rho_\varepsilon *, a(x)]\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu u\right)\right| \leq \mathrm{const.}\|u\|^2$$

(ii) $$\mathrm{Re}\left(\rho_\varepsilon * u,\ [\rho_\varepsilon *, a(x)]\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu u\right) \longrightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \to +0.$$

尚詳しくは，[12] を参照されたい。初期-境界値問題に対しては，まだ不満な点も多い。Aの係数の x のみの函数とした点，境界 Σ が A に対して，non-characteristic とした点，等々。これらの解決は今後に期する。

参考文献

[1] S. Mizohata: *Some remarks on the Cauchy problem*, J. M. Kyoto Univ. 1-1, 109—127 (1961)

[2] Y. Hasegawa: *Strongly p-parabolic systems*, Proc. J. A., 37 473 ~ 477 (1961)

[3] 溝畑茂 : 偏微分方程式論, 岩波.

[4] 竹内二郎 : 修士論文 (京大 '69).

[5] K. Igari : Well-posedness of the Cauchy problem for some evolution equations, (to appear) Pub. R.I.M.S. vol. 9, No. 3 (1973).

[6] M. Miyake : Degenerate parabolic differential equations, to appear

[7] G. Fichera : On a unified theory of boundary value problems for elliptic parabolic equations of second order, Boundary problems in differential equations, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis. 1960, 97 ~ 120.

[8] O. A. Oleinik : Linear equations of second order with non-negative form, M. Sbornik, 69 (1966) 111 ~ 140. Eng. translation Amer. Math. Soc.

[9] Kohn - Nierenberg : Non-coercive boundary value problems, C.P.A.M., 18 (1965) 443 — 492.

[10] —— : Degenerate elliptic parabolic equations of second order., C.P.A.M., 20 (1967), 797 — 872.

[11] Lax - Phillips : Local boundary conditions for symmetric dissipative operators, C.P.A.M., 13 (1960), 427 - 455.

[12] K. Igari : Degenerate parabolic differential equations,

Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ. vol. 9, No. 2 (1973), to appear.