数理解析研究所講究録
第207巻 1974年 54-58

完全交さ孤立特異点の全モノドロミーの有限性と交さ型式の正定値性

東大 教養　斎藤恭司

本稿は次の4種の2次元の特異点（それ等を単純楕円型特異点と名付ける）と単純代数群のルート系の研究に現れる拡大されたDynkin図型との関連を述べる。(表) その応用として2次元の完全交さ、normal特異点について、そのvanishing cycleのなすintersection formが正定値となる事、vanishing cycleのなすtotal monodromy groupが有限群となる事、特異点が有理2重点となる事の3者が同値である事を示す。なお実係数の場合に、力学系の問題より、これ等の特異点についてArnoldの研究（[1]）がある。又、拡大されたDynkin図型と楕円曲線(面)との関連が既に小平[3]にも見い出され、相互に何らかの内的関連があると思われるが、現在の所は分らない。

名前	方程式	$C \circ C$	r	s	h	μ
$\tilde{E}_6$	$y(y-x)(y-\lambda x)-xz^2=0$	-3	1	1	∞	8
$\tilde{E}_7$	$yx(y-x)(y-\lambda x)-z^2$	-2	1	1	∞	9
$\tilde{E}_8$	$y(y-x^2)(y-\lambda x^2)-z^2$	-1	1	1	∞	10
$(\tilde{D}_4)$	$\begin{cases} y(w-(1+\lambda)y+\lambda x)-z^2=0 \\ y^2-xw=0 \end{cases}$	-4	/	/	/	7

容易に、これ等の特異点の *minimal resolution* の *exceptional curve* C は、非特異な楕円曲線 C となる事が分る。その楕円曲線の絶対不変量は $j = \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$ で与えられ、又 *self-intersection number* $C\circ C$ は上記の通り。(上記式に $\lambda \in \mathbb{C}$ は parameter で $\lambda \neq 0, 1, \infty$)

上記の表中 r　s, h はそれぞれ (当面は) *quasi-homogeneous* な超曲面の孤立特異点 (X,x) に対し定義された不変量(有理値)で、次の様にして与へられる。

$(X,x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ は局所的に $f=0$ なる方程式で定義されてい $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, $D = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ を微分の芽で $Df = f$ を満すものとする時。

$$r(X,x) = \mathrm{tr}.(D) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(0)$$

$$s(X,x) = \max\left\{ \alpha : \alpha \text{ は } D : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}\Big/\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) \circlearrowleft \text{ の固有値} \right\}$$

r, s は非負の有理数値をとるが、更に Hartshone の duality を用いて：

$$2r(X,x) + s(X,x) = n$$

が示せる。さてこの時 $h(X,x) = 2/1-s(X,x) = 2/2r(X,x)-n+1$ と定義して、$h(X,x)$ を (X,x) の coxeter 数と呼ぶ事にする。

さて有理2重点は既に M. Artin, E. Brieskorn (Lipman) 等の研究があるが、ここでその方程式を復習し上記の量を計算してみると、

分類		r	s	h	μ
A_k :	$x^{k+1}+y^2+z^2$	$1/k+1\ +1$	$(k-1)/(k+1)$	$k+1$	k
D_k :	$x^{k-1}+xy^2+z^2$	$1/(k-1)2\ +1$	$2(k-2)/2(k-1)$	$2(k-1)$	k
E_6 :	$x^4+y^3+z^2$	$1/12\ +1$	$10/12$	12	6
E_7 :	$x^3y+y^3+z^2$	$1/18\ +1$	$16/18$	18	7

E_8： $x^5+y^3+z^2$ $1/30+1$, $28/30$, 30 , 8

さてここで上に出てきた $\hat{E}$, $(\hat{D})$, A, D, E, 等々の方程式はいずれも、quasi-homogeneous である事に着目しよう。(quasi-homog. なる性質は intrinsic な特徴ずけを持つ、定義等詳細は[6]参照。)

すると次の結果を得る。

定理 $(X,x)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ の quasi-homog. isolate hypersurface singularity の芽とする時、次の 4 条件は同値

i) (X,x) の local deformation はすべて又 quasi-homog. となる。

ii) $0\leq S(X)\leq 1$

iii) $r(X)\geq \frac{n-1}{2}$ $\quad(\Leftrightarrow\ h(X)>0$

iv) (X,x) は A_k, D_k, E_6, E_7, E_8, $\hat{E}_6$, $\hat{E}_7$, 又は $\hat{E}_8$ の方程式に non-degenerate な 2 次型式を加えた方程式で定まる。(例へば $x^{k+1}+y^2+z^2+x_4^2+\cdots+x_n^2=0$ 等)

更に精密には、上記のある Type P の特異点が type Q の特異点に deform できる必要充分条件は P に対応する Dynkin 図型が Q に対応する Dynkin 図型を含む事である事が示せる。

さて上記の量 r, s, 又は h の値をみても予感される事として単純楕円型特異点は何らかの意味で、有理 2 重点の境界に位置しているのではないかという事が次の Prop によっても裏づけられる。

Prop. i) (X,x) を hypersurface 孤立特異点の germ とする。もし (X,x) が有理 2 重点でないなら、(X,x) の local deformation には

$\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, 又は $\widetilde{E}_8$ のいずれかが現れる。

ii) (X,x)を 埋め込み余次元が2以上の完全交さ孤立特異点の芽とすると、(X,x)の local deformation に 次の $(\widetilde{D}_4)$ が現れる。

$$\begin{cases} x_1^2+\cdots + x_m^2=0 \\ a_1x_1^2+\cdots +a_mx_m^2=0 \end{cases} \qquad a_i\neq a_j \quad (i\neq j)$$

さて(X,x)を方程式系 $f_1=\cdots=f_k=0$ によって与へられた完全交さ孤立特異点とすると $f_1=\varepsilon_1,\cdots,f_k=\varepsilon_k$ は、適当に小さな定数$(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k)$をとれば smooth でその丁度中間次元の所に homology を持ち intersection form が定まる。又 方程式 $f_1,\cdots,f_k$ を deform し、定数 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$ を動かす事により、その homology の monodromy が現れるが、方程式の versal な deformation と定数 ε を可能な限り動かして得る monodromy の全体を全モノドロミー群と呼ぶ事にする。

すると 単純楕円型特異点については、intersection form は固有値0を持ち 定値とはならず、又全モノドロミー群が無限群となる。

1方有理2重点についてはintersection form は Cartan-Killing form と一致し、全モノドロミー群 Weyl 群と同型になる事が Brieskorn ([2])により知られている。従って上記の Prop. とあわせる事により次の 結果が分る。(この結果は部分的には Lamotoke によっても知られていた。)

定理 (X,x)を偶数次元の完全交さ孤立特異点の芽とする。

以下の3条件は互に同値である。

i) (X, x) の vanishing cycle の intersection form は定値とする。

ii) (X, x) の total monodromy group は有限群とする。

iii) (X, x) は有理2重点の方程式に非退化2次型式を加えて得られる方程式で定義された hypersurface isol. singularity である。

[1] V.I. Arnold : Remark on the meathod of stable phase ⋯ , Uspekhi Mat. Nauk. XXVIII, 5 (1973) p17-45.

[2] E. Brieskorn : Singular elements of semi-simple algebraic groups, Proc. of the Int'l Cong. of Math., Nice, 1970.

[3] K. Kodaira : On compact analytic surface II, Ann. of Math 77(3) (1963) 563-626.

[4] K. Saito : Einfach Elliptische Singularitäten , Göttingen 1973.