数理解析研究所講究録
第 210 巻 1974 年 32-44



# $C^*$－代数の derivation と multiplier についてのいくつかの例.

山形大 理　富山 淳

§1. $C^*$－代数の derivation の lifting の問題は依然として未解決な大きな話であるが non-separable な場合には成立しないことが一部の人達には知られていた。しかしまだ印刷されたものは出ていない。次の結果が成立する。

"$T$ を locally compact Hausdorff 空間で normal でないものとする。$M_2$ を $2 \times 2$ の行列全体, $C_0(T, M_2)$ を $M_2$－valued で $\infty$ で $0$ になる連続関数のつくる $C^*$－代数とする。$T_1, T_2$ を $T$ の閉集合で開近傍では separate できないものとすると、$C_0(T, M_2)$ の quotient algebra $C_0(T_1 \cup T_2, M_2)$ の中には $C_0(T, M_2)$ の derivation に持ちあげられない derivation が存在する"。

上の $M_2$ は下の証明からもわかるように例えば単位元をもつ非可換な $C^*$－代数なら何でもよい。

証明. $a, b \in M_2$ を $\|ab - ba\| = 1$ ととる。$C_0(T_1 \cup T_2, M_2)$

の derivation $\delta$ を

$$\begin{aligned}\delta(x)(t) &= ax(t) - x(t)a \qquad t \in T_1 \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad\ t \in T_2\end{aligned}$$

とおく。今 $\delta$ が $C_0(T, M_2)$ の derivation $\delta_0$ に持上げられたとする。$\delta_0$ はその multiplier algebra $C^b(T, M_2)$（有界連続関数環）には自然に拡大出来る。これを $\bar{\delta}_0$ とすると、$C^b(T, M_2)$ も $C_0(T, M_2)$ も各点 $t$ での quotient algebra は共に $M_2$ であるから任意の $y \in C^b(T, M_2)$ について

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_0(y)(t) &= ay(t) - y(t)a \qquad t \in T_1 \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad\ t \in T_2\end{aligned}$$

そこで $y(t) = b$ という定数関数を考えると

$$\|\bar{\delta}_0(b)(t)\| = 1 \quad (t \in T_1), \quad \|\bar{\delta}_0(b)(t)\| = 0 \quad t \in T_2.$$

これは $\bar{\delta}_0(b)(t)$ の連続性と $T_1, T_2$ の性質に反する。

これについて separable な $C^*$-代数については lifting が成立するであろうと予想されているが最近 G. Elliott [5] は"有限次元 $C^*$-代数の増加列により生成される $C^*$-代数においては lifting が成立する"ことを示している。持上げの問題は又 ideal から全体の代数に derivation が拡大出来るかという問題とも密接に関係している。元の代数の multiplier は derivation の中ではその性質からしてわりと良質な derivationを与える(?)と考えることが出来るがこれについては[1]で持上げが可能なことが示されている。即ち

定理1. Aをseparableな$C^*$-代数、Iをその任意の閉idealとすると、Aのmultiplier代数$M(A)$より$A/I$のmultiplier代数$M(A/I)$への自然な写像(拡大)はontoである。

§2. $C^*$-代数のderivationがいつmultiplierで与えられるか(単位元がある場合はinnerだということになる)については種々な結果があるがそのようなものでないderivationをもつ$C^*$-代数も又数多くある。そこである$C^*$-代数のすべてのderivationがmultiplierで与えるのはいつかということになるが今の所I型の$C^*$-代数についてはある程度満足するcharacterizationが得られている。AEPT[2].

定理2. Aをcontinuous traceをもつ$C^*$-代数とする。Aのspectrumがparacompactとすると、Aのderivationはすべてmultiplierで与えられる。

paracompactの仮定は証明の中でlocalに一次元な連続なfieldの合成に1の分解を使用するのにつけたもので、この仮定が本当に必要なものかどうかについては筆者達は反例をもっていない。上のようなfieldが全体で存在する時には勿論1の分解という工夫は不要だから、[2]の証明の系として

Lance [7] における次の結果も導びける

系. Tを locally compact Hausdorff 空間とすると, $C_0(T, C(H))$ の derivation はすべてその multiplier で与えられる.

尚 $C_0(T, C(H))$ の multiplier 代数は APT [1] により T上の $B(H)_{s^*}$ -valued ( B(H) に strong $*$-topology を入れたもの) 有界連続関数全体の代数であることが知られている。

上の逆については次のことが成立つ.

定理3. Aを separable なI型 $C^*$-代数で, その spectrum が quasi-separated であるとする. このとき, A の derivation がすべて multiplier で与えられるならば A は continuous trace をもつ $C^*$-代数である.

ここで位相空間 X でその点が separated とは, その閉包に属さない点 $t'$ は常に t と開集合で separate できることを言い, X が quasi-separated とは, 任意の X の閉集合が相対位相で dense な closed, separated point の開集合をもつことをいう. ここで separable の条件は落せない.

例2. T を Stonean space で, $t_0$ をその中の non-isolated な点とする. A を T 上の $M_2$-valued な連続関数で $x(t_0)$ が対角行列になっているもののつくる $C^*$-代数とする. A は明らかにI型 (liminary) でその spectrum は quasi-separated

であるが Hausdorff にはなっていない。しかし $A$ の derivation はすべて inner になる。それには $\delta$ を $A$ の derivation とし、$\{T_\gamma\}$ を $T \sim \{t_0\}$ の互に disjoint な clopen set の maximal family とする。

$A_\gamma$ ; $T_\gamma$ より $M_2$ への連続関数のつくる $C^*$-代数

$\delta$ は $A_\gamma$ の derivation $\delta_\gamma$ をひきおこし、ここでは定理2より derivation は inner になるから特に

$$\exists a_\gamma \in A_\gamma \ ; \ \|a_\gamma\| \leqq \|\delta_\gamma\|, \quad \delta_\gamma(x_\gamma) = a_\gamma x_\gamma - x_\gamma a_\gamma$$

$$\text{又} \quad \delta_\gamma(x_\gamma)(t) = \delta(x_\gamma)(t) = a_\gamma(t) x_\gamma(t) - x_\gamma(t) a_\gamma(t) \quad t \in T_\gamma .$$

$T_\gamma$ は clopen set だから以上から任意の $f \in A$ について

$$\delta_\gamma(f|T_\gamma) = a_\gamma(f|T_\gamma) - (f|T_\gamma)a_\gamma = \delta(f)|T_\gamma .$$

今関数 $a(t)$ を

$$a(t) = a_\gamma(t) \qquad t \in T_\gamma$$

とおくと、$T = \overline{\cup T_\gamma}$、及び上の式と $a(t)$ が有界であることから、$T$ 上の $M_2$-valued 連続関数に一意に拡大出来る。よって $a$ は $\delta$ の generator である。ここで又

$$a(t_0)f(t_0) = f(t_0)a(t_0) \qquad \forall f \in A$$

で $M_2$ の対角行列全体は maximal abelian であるから、$a(t_0)$ 自体が対角行列になる。i.e. $a \in A$.

§3 一般には multiplier ではあらわれない derivation は多く存在するが $\delta$ が $A$ の derivation の時もし適当に小さな ideal に $\delta$ を制限したら、それは multiplier ではあらわれないかという疑問が当然起る。しかしこの答は否定的である。

例3. $B$ を fermion 代数とすると、$A=C([0,1], B)$ の中にはどのような(non-zero) ideal に制限しても multiplier であらわれない derivation が存在する。

$$d=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{とし}$$

$$x_n=\left(\bigotimes_1^{n-1} e\right)\otimes d\otimes\left(\bigotimes_{n+1}^{\infty} e\right)$$

$x_n$ で定義される $B$ の derivation を $\delta_n'$ とおくと、$\|\delta_n'\|=2$ であるが、$B$ は

$$a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_k\otimes\left(\bigotimes_{k+1}^{\infty} e\right)$$

の形の元で生成されているから

$$\delta_n'(x)\longrightarrow 0 \qquad \forall\, x\in B$$

$\{r_k\}$ を $[0,1]$ 内の有理数全体とし、各 $r_k$ について $f_{kn}\in C(0,1)$ を

$$0\leqq f_{kn}\leqq 1,\quad f_{kn}f_{km}=0 \quad n\neq m,\quad f_{kn}(r_k)=0$$

且つ $f_{kn}$ は $n$ とともに長さが縮少しながら $r_k$ に近づくある区間上で $1$ をとるものとする。$M$ を $B$ の factor 表現とし、$[0,1]$ 上の有界な $M$-valued 関数全体のつくる von Neumann 代数

を $\mathfrak{M}$ とする. ( $\mathfrak{M} = \ell^\infty(0,1) \otimes M$ である).

$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn} \otimes x_n$ とし $\delta_k = \mathrm{ad}\, y_k$ とすると

$\forall f \otimes b \in A$ について

$$\delta_k(f \otimes b) = \sum_{n=1}^{\infty} f f_{kn} \otimes \delta_n'(b)$$

この右辺は $\{\delta_n'\}$ の性質によってノルム收束となるから $\delta_k$ は $A$ の derivation を与える. そこで

$y = \sum 2^{-k} y_k$ とおくと, この $y$ によって与えられる $A$ の derivation $\delta$ が求めるものである. $I$ を $A$ の non-zero な閉イデアルとすると, 開集合 $G$ が存在して

$$I = C_0(G) \underset{\alpha}{\otimes} B = C_0(G, B)$$

とかける. $r_\ell$ を $G$ に含まれる有理数の最初のものとする.

$m > \ell$ をとり固定する. $f_0 \in C_0(G)$ を

$f_0(r_\ell) = 1, \quad 0 \leq f_0 \leq 1, \quad f_0(r_k) = 0 \quad k \leq m \quad k \neq \ell$

ととり $a = f_0 \otimes 1_B$ とおく.

$$ya = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} y_k a = 2^{-\ell} y_\ell a + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn} f_0 \otimes x_n$$

(但し $k \neq \ell$)

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} f_{kn} f_0 \otimes x_n \quad \text{in } \mathfrak{M}$$

ここで第2項は $\|f_{kn} f_0\| \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$ だからノルム收束し $A$ の元 ($\Rightarrow$ $I$ の元) である. 又第三項は

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} f_{kn} f_0 \otimes x_n \right\| \leq \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^\ell}$$

一方オ一項

$$2^{-l} y_l a = 2^{-l} \sum_{n=1}^{\infty} f_{e_n} f_0 \otimes x_n$$

は関数として$\gamma_l$の近くで常に$2^{-l}$の振動幅をもつ。従って$ya$は$t=\gamma_l$で連続にならず得ない、即ち$ya \notin I$.

次に$\delta|I$の他のgenerator $x \in \mathfrak{M}$をとると、$\forall t \in G$について$x(t)-y(t)$は$M$のcenterに入るから、scalar関数$f(t)$が存在して

$$x(t)-y(t) = f(t) 1_B \qquad よって$$

$$\begin{aligned} xa(t) &= (x-y)a(t) + ya(t) \\ &= f(t) f_0(t) 1_B + ya(t) \end{aligned}$$

ここで最初の$a$のとり方から、$t=\gamma_l$の近傍でのspectreを考えれば$xa(t)$は又$t=\gamma_l$で連続にならないことがわかる。以上から$\delta|I$のどの生成元も$I$のmultiplierにはならない。

上の例は又、$C^*$-tensor積$A \otimes_\alpha B$においてはA, Bがderivationについてよほどよい性質を示しても、$A \otimes_\alpha B$については同じようなことが期待出来ないということを示している。この原因の一つはfermion代数においては$\{\delta_n'\}$という$\|\delta_n'\| \geq c > 0$で$\delta_n'(x) \to 0$というderivationの列が存在していることによる(Hall [6] 参照)。従ってこのような列が存在しな

いようなC*ー代数については自然な結果が出ることが予想されるがこれについてはPedersen [8] は次のことを証明している。

定理4. Tを metric compact Hausdorff 空間, Aを以下のようなC*ー代数とする. このとき $C(T, A) = C(T) \otimes_\alpha A$ の derivation は inner である.

Aの条件

(*) A は AW*ー代数の primitive quotient algebra

(**) Aの derivation は inner

ここでTを locally compact にとれば, 当然上の結果は任意の derivation が multiplier で与えられるという形になる.

次に上の例の dual のような形として, C*ー代数Aに derivation δが与えられたとき, 適当なイデアルIがあって $A/I$ にδより induce された derivation は multiplier で与えられないかという傾向がおこる。実際Aが単位元を持つ場合は極大イデアルをとれば Sakai の定理[9] によってこのことは成立つ. しかし一般には成立しない。

例4. $H = \bigotimes_{n=1}^{\infty} H_n$ を incomplete な無限テンソル積で各 $H_n$ がすべて separable な無限次元ヒルベルト空間とする, (即ち $H_n \cong H_0$ ). 各 i について H の factorization

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_i \otimes \left( \bigotimes_{n=i+1}^{\infty} H_n \right)$$

を考え

$$K_{i+1} = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes C\left( \bigotimes_{n=i+1}^{\infty} H_n \right)$$

( 但し $K_1 = C(H)$ )　とおく.

$A = C^*(K_i \mid i = 1, 2, \cdots)$ を考える. これは Dixmier－Behncke－Kraup－Leptin による I 型の $C^*$－代数の例 [3] である. $p$ を $H_0$ 上の無限次元の projection で $1-p$ も又無限次元とする.

$$p_n = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \overset{n\text{番目}}{p} \otimes 1 \otimes \cdots\cdots$$

とし　$g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} p_n$　とおけば, この $g$ によってひきおこされた $A$ の derivation $\delta$ が求めるものである.

$$\delta_n = \mathrm{ad}\, p_n \mid A \qquad \delta = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} \delta_n$$

先ず

$$\delta_n(K_i) \subset K_i \qquad i \leq n$$

$$\delta_n(K_i) = 0 \qquad i > n$$

であるから $\delta_n$ は $A$ の derivation であり, $\delta$ は又 $A$ の derivation である. $1 \otimes x \in K_2$ $(x \neq 0)$ をとり

$$g(1 \otimes x) = p \otimes x + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n+1} p_n (1 \otimes x)$$

を考えると, 第 2 項は $K_2$ に属するが $p \otimes x \notin A$ だから $g(1 \otimes x) \notin A$. 何となれば $B(H_1)$ 上の有界な汎関数 $\varphi$ を

$$\langle C(H_1) + \lambda 1, \varphi \rangle = 0, \qquad \langle p, \varphi \rangle \neq 0$$

又 $B(\bigotimes_{n=2}^{\infty} H_n)$ の有界汎関数 $\psi$ を

$$\langle x, \psi \rangle \neq 0$$

ととると、 $A \subset B(H_1) \otimes_\alpha B(\bigotimes_{n=2}^{\infty} H_n)$

であるから

$$\langle K_1, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle C(H_1) \otimes_\alpha C(\bigotimes_{n=2}^{\infty} H_n), \varphi \otimes \psi \rangle = 0,$$

$$\langle K_2, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle \langle C(\bigotimes_{n=2}^{\infty} H_n), \psi \rangle = 0$$

又同様に $\langle K_i, \varphi \otimes \psi \rangle = 0 \quad i \geq 2$ .

従って

$\langle A, \varphi \otimes \psi \rangle = 0$ であるが

$$\langle p \otimes x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle p, \varphi \rangle \langle x, \psi \rangle \neq 0 .$$

更に $A$ は $H$ 上既約であるから $\delta$ の他の生成元 $y$ は

$$y = g + \lambda 1$$

とかける。よって $\delta$ は multiplier では与えられない。次に $I$ を $A$ の任意のイデアルとすると、ある自然数 $i_0$ が存在して

$$I = C^*(K_i ; \ i \leq i_0)$$

且つ

$$A/I \cong C^*(K_i ; \ i > i_0)$$

となる([3] 参照)。ここで $A/I$ に $\delta$ からひきおこされた derivation を考えると、これは上の対応で

$$\sum_{n=i_0+1}^{\infty} 2^{-n+1} p_n$$

によって $C^*(K_i\,;\ i > i_0)$ にひきおこされた derivation になる．従ってそれは前述のことと殆んど同じ理由によって multiplier では与えられない．

## 文　献


1. C. A. Akemann, G. K. Pedersen, J. Tomiyama: Multipliers of $C^*$-algebras, J. Functional Analysis 13 (1973), 277–301
2. C. A. Akemann, G. A. Elliott, G. K. Pedersen & J. Tomiyama ; Derivations and multipliers of $C^*$-algebras, Amer. J. Math. に発表の予定
3. H. Behncke, F. Krauß & H. Leptin ; $C^*$-Algebren mit geordneten Ideal Folgen, J. Functional Analysis, 10 (1972), 204–211
4. G. Elliott ; Some $C^*$-algebras with outer derivations, Rocky Mountain J. Math., 3 (1973), 501–506
5. ——— ; On lifting and extending derivations of approximately finite-dimensional $C^*$-algebras, Univ. of Copenhagen, Preprint No. 20 (1973)
6. A. A. Hall, Derivations of certain $C^*$-algebras, J. London Math. Soc. 5 (1972), 321–329.
7. E. C. Lance, Automorphisms of certain operator

algebras, Amer. J. Math., 91 (1969), 160–174

8. G. K. Pedersen, Inner derivations of certain Tensor products, Univ. of Copenhagen, Preprint No. 11 (1973)

9. S. Sakai ; Derivations of simple $C^*$-algebras, J. Functional Analysis 2 (1968), 202–206.