数理解析研究所講究録
第210巻 1974年 45-54

Double commutant theorem for topological *-algebras

宮城教育大　板垣 芳雄

Hilbert space H では通常 unbounded となるような operators も含むような operator algebra について考える。Powers, R.T. (Comm. math. Phys., 21, 1971) が性質のよい algebra として導入した self-adjoint algebra $\mathfrak{A}$ については, von Neumann algebra の double commutant theorem が拡張されることを示すのが主要部分である (Theorem 2)。Powers は commutant として H 上の bounded operators からなるなるべく大きい集合 $\mathfrak{A}^c$ をとっているが（本講究録, 御園生 参照）, われわれは $\mathfrak{A}$ の元の共通定義空間 $\mathfrak{D}$ 上の linear operators からとる。それを $\mathfrak{A}'$ と記す。いわゆる rigged Hilbert space (Gelfand triplet) の base space $\mathfrak{D}$ 上の連続な operator の algebra として考えようというのがわれわれの立場である。従って commutant $\mathfrak{A}'$ は一般に H 上 unbounded となる

operators を含むことになるが，self-adjoint algebra のときは，$\mathfrak{A}'$ のうち H 上 bounded operators であるもの $(\mathfrak{A}')_b$ は $\mathfrak{A}^c$ と一致するのである（Lemma 1, ← Powers）。次に $\mathfrak{A}$ が commutative self-adjoint のとき $\mathfrak{A}$ の対称元が全て essentially self-adjoint であることを示す（Proposition 6）.

くわしく定義を述べる前に，われわれの設定が自然に現われているような具体例を1つあげておく．

実軸 R 上コンパクト台をもつ無限回可微分関数の空間 $\mathcal{D}$，$\mathcal{D}$ 上の translation $x(s) \longmapsto x(s-t)$ を τ_t $(= \delta_t *)$ とする。$\mathfrak{A} = \{\tau_t\ ;\ t \in R\}$ と可換な $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への連続な線型作用素はコンパクト台をもつ超関数 f $(\in \mathcal{E}')$ によって $x \longmapsto f * x$ と表わされる。$\mathfrak{A}' = \mathcal{E}'*$ は $f(s) \mapsto \overline{f(-s)}$ を involution として可換な $*$-algebra である。$\mathfrak{A}'$ は L^2 $(\supset \mathcal{D})$ 上 unbounded となる operators を含む。

一方 $\{\tau_t\}$ は連続な1径数半群を作り，その generator は $\frac{d}{ds}$ である。

τ_t は L^2 上 unitary operator であるが $\frac{d}{ds}$ は L^2 上連続でない。しかし $\mathcal{D}$ 上では連続である．

$\frac{d}{ds}$ on $\mathcal{D}$ $(= \delta' *)$ と可換な $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への連続な線型作用素全体はまた $\mathfrak{A}'$ $(\supset \mathfrak{A})$ である。

§1. 定義と記号

簡単のため Φ は reflexive Fréchet space とし、連続な内積 $(\ ,\ )$ をもつとする。H をその内積について完備化した Hilbert space, Φ' を Φ の dual space とし、これら triplet を identification

$$\Phi' \supset H' = H \supset \Phi$$

のもとに考える。Φ' には Φ による polar topology を導入すると、上の $\supset$ は densely embedding である。以下特にことわらず、Φ', H または Φ 上の operators 同士で、Φ に restrict したとき一致するものは同一視する。

Φ 上の（Φ から Φ への）continuous linear operators 全体からなる algebra を $L(\Phi)$, Φ' 上でのそれらを $L(\Phi')$ で表わす。$L(\Phi)$ に次の semi-norms 系で topology（<u>weak topology</u> と呼ぶことにする）を導入する。

$$|(Ax, y)|, \qquad x, y \in \Phi.$$

明らかに、積は weak topology に関し separately continuous である。次に、$L(\Phi)$ の元 A に対し、A の transpose $A' \in L(\Phi')$（の Φ への restriction $A|\Phi$）がまた $L(\Phi)$ の元であるとき、それを $A^\#$ と記す。$L(\Phi)$ の subalgebra $\mathfrak{A}$ に対し $\{A \in \mathfrak{A}\ ;\ A' \in \mathfrak{A}\}$ を $\mathfrak{A}_s$ で表わす。

<u>involution</u>：$A \longmapsto A^\#$ で閉じた subalgebra $\mathfrak{A}$ を

($\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_s$), symmetric algebra ということにする。以下で symmetric algebra というとき

(i) $\mathfrak{A} \ni I$（恒等作用素），(ii) $\mathfrak{A}_b=\mathfrak{A}\wedge B(H)$（$\mathfrak{A}$ の元で H 上 bounded な operator 全体）が $\mathfrak{A}$ で dense，

を仮定する。symmetric algebra $\mathfrak{A}$ について特に次式が等号で成立するとき，$\mathfrak{A}$ は self-adjoint であるという。

$$\Phi < \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathcal{D}(\bar{A}) \subset \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathcal{D}(A^*)\ .$$

ただし，$\bar{A}$ は A の H における closure，$\mathcal{D}(\bar{A})$ は $\bar{A}$ の domain，A^* は A の H での adjoint で $\mathcal{D}(A^*)=\{x\in H\ ;\ A'x\in H\}$.

algebra $\mathfrak{A}\subset L(\Phi)$ の commutant $\mathfrak{A}'$ は次のように定義する．

$$\mathfrak{A}'=\{C\in L(\Phi)\ ;\ CA=AC,\ \forall A\in\mathfrak{A}\}\ .$$

$\mathfrak{A}'$ は weakly closed な algebra であるが，必ずしも symmetric でない．

また，$L(\Phi)$ の subsets $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ に対し，$\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$ なら $\mathfrak{A}'\supset\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}''$. したがって

$$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}'''=\mathfrak{A}^{(v)}=\cdots$$

$$\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}''''=\mathfrak{A}^{(vi)}=\cdots$$

§2. 定理と証明

Lemma 1. $\mathfrak{A}$ が self-adjoint algebra のとき，$(\mathfrak{A}')_b$ は，$\mathfrak{A}_b$ の $\mathcal{B}(H)$ でとった commutant $\mathfrak{A}_b{}^c$ と一致し，従って von Neumann algebra である。

Proof. $(\mathfrak{A}')_b \subset \mathfrak{A}_b{}^c$ は明らかである．以下逆を示す。$\mathfrak{A}_b{}^c$ の任意の元 C に対し

$$(CAx, y) = (ACx, y), \quad {}^\forall x, y \in \Phi, \quad {}^\forall A \in \mathfrak{A}_b.$$

従って $(CAx, y) = (Cx, A^\# y)$, 〃 , ${}^\forall A \in \mathfrak{A}$ ……(1)

ゆえに ${}^\exists k > 0$; $|(Cx, A^\# y)| \leq k\|y\|$, ${}^\forall y \in \Phi$.

∴ $Cx \in \mathcal{D}(A^{\#*})$. これが任意の $A \in \mathfrak{A}$ について成立するのだから，仮定より

$$Cx \in \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}(A^{\#*}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}(A^*) = \Phi .$$

従って C は Φ から Φ への operator であり，$C^* \in \mathfrak{A}_b{}^c$ で C^* も Φ 上の operator であるから，C は closed operator である。Φ を Fréchet space としたから，closed graph theorem が適用でき $C \in \mathcal{L}(\Phi)$. また，$x \in \Phi$ に対し $CAx = A^{\#*}Cx = ACx$, よって $C \in \mathfrak{A}'$ が示された。

Remark. 一般には，(1) を満たす $\mathcal{B}(H)$ の元 C 全体は，積について閉じていない．

Theorem 2. $\mathfrak{A}$ が self-adjoint algebra のとき

$$(\mathfrak{A}')_b{}' = \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}^{\sim} \quad (\mathfrak{A} \text{ の weak closure}).$$

Proof. $(\mathfrak{A}')_b{}' \supset \mathfrak{A}'' \supset \mathfrak{A}^{\sim}$ は明らかである。よって $\mathfrak{A}_b$ が $(\mathfrak{A}')_b{}'$ で dense であることを示せば十分である。以下それを示す。x を Φ の任意の元，$\mathfrak{M}$ を $\{Ax\ ;\ A \in \mathfrak{A}_b\}$ の H における closure とする。$\mathfrak{A}_b$ の任意の元 A に対して，A を H 上の operator とみなして，continuous であるから，$A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ かつ $A^*\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$．従って，$H$ から $\mathfrak{M}$ への projection を E とすると

$$EAE = AE, \quad EA^*E = A^*E.$$

後者の adjoint をとって $EAE = EA$，ゆえに

$$AE = EA.$$

A は $\mathfrak{A}_b$ の任意の元であったから $E \in \mathfrak{A}_b{}' = (\mathfrak{A}')_b$．

いま，$(\mathfrak{A}')_b{}'$ の任意の元を B とし，

$$N_1 = \{A \in L(\Phi)\ ;\ |((A-B)x, y)| < \varepsilon\}, \quad x, y \in \Phi$$

とおくと，仮定 $I \in \mathfrak{A}$ と上に示したことから

$$Bx = BEx = EBx \in \mathfrak{M}$$

ゆえに $\exists A \in \mathfrak{A}_b\ ;\ \|Ax - Bx\| < \dfrac{\varepsilon}{\|y\|}$.

従って，この $A \in N_1 \cap \mathfrak{A}_b \neq \phi$.

次に，B の任意の近傍

$$N = \{A \in L(\Phi)\ ;\ |((A-B)x_i, y_i)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

に対し $\exists A \in N \cap \mathfrak{A}_b$ を示す。

$H^+ = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$, $\Phi^+ = \Phi \oplus \Phi \oplus \cdots \oplus \Phi$ を direct sum of n-copies として, $A \in L(\Phi)$ に対し, Φ^+ 上の operator A^+ を

$$A^+(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n)$$

で定義する。$\mathfrak{A}^+ = \{ A^+ ; A \in \mathfrak{A} \}$ は $H^+ \supset \Phi^+$ に作用する self-adjoint algebra であり, $(\mathfrak{A}^+)'$ は

$$B(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n B_{1i} x_i, \sum_{i=1}^n B_{2i} x_i, \cdots, \sum B_{ni} x_i \right),$$
$$B_{ij} \in \mathfrak{A}'$$

なるような $B \in L(\Phi^+)$ 全体からなる。従って, 先の議論より $(\mathfrak{A}^+)_b{}^c = (\mathfrak{A}^{+\prime})_b$ で, また

$$\forall B^+ \in (\mathfrak{A}^{+\prime})_b{}', \quad \exists A^+ \in (\mathfrak{A}^+)_b \ ;$$
$$\| (A^+ - B^+)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \| = \sum_{i=1}^n \| (A-B) x_i \| <$$
$$< \varepsilon / \max \| y_i \| .$$

ところで容易に確かめられるように

$$(\mathfrak{A}^{+\prime})_b{}' = (\mathfrak{A}')_b{}'^{+}, \quad (\mathfrak{A}^+)_b = (\mathfrak{A}_b)^+$$

であるから $A \in N \cap \mathfrak{A}_b$.

Remark. 証明から知れるように, この定理は Lemma 1 の結論 $(\mathfrak{A}')_b = \mathfrak{A}_b{}^c$ が成立するような symmetric algebra について成立する。

Corollary 3. weakly closed algebra $\mathfrak{A}$ with dense $\mathfrak{A}_b$ について, $\mathfrak{A}_s$ が self-adjoint ならば

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''.$$

$B(\Phi) = L(\Phi) \cap L(\Phi')$ に次の semi-norms 系で Topology を入れる.

$$|\langle Ax, y\rangle|,\quad |\langle A^{\#}x, y'\rangle|,\quad x \in \Phi,\ y' \in \Phi'.$$

いま, commutant として

$$\mathfrak{A}' = \{ C \in B(\Phi)\ ;\ CA = AC,\ \forall A \in \mathfrak{A} \}$$

をとると, $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}' \supset (\mathfrak{A}')_b$ であるから, von Neumann algebra の double commutant theorem の拡張として, 次のことが成り立つ.

Corollary 4. $\mathfrak{A}$ が $B(\Phi)$-closed, self-adjoint algebra ならば $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$.

Theorem 2 の条件のもと $(\mathfrak{A}')_b' = \mathfrak{A}''$ であったが, $(\mathfrak{A}')_b$ が $\mathfrak{A}'$ で dense であるか, という問題について,

Proposition 5. $\mathfrak{A}$ が self-adjoint algebra で, しかも $\mathfrak{A}_b$ が von Neumann algebra ならば, $(\mathfrak{A}')_b$ は $\mathfrak{A}'$ で dense な von Neumann algebra である.

Proof. Theorem 2 の Remark より, $\mathfrak{A}$ が self-adjoint

でなくとも，$(\mathfrak{A}')_b = \mathfrak{A}_b{}^c$ ならば $\mathfrak{A}_b$ は $\mathfrak{A}''$ で dense であった。仮定より $(\mathfrak{A}')_b = \mathfrak{A}_b{}^c$．両辺の $B(H)$ での commutant をとって $(\mathfrak{A}')_b{}^c = \mathfrak{A}_b{}^{cc} = \mathfrak{A}_b = (\mathfrak{A}'')_b$．従って上に注意したことから，$(\mathfrak{A}')_b$ は $(\mathfrak{A}')'' = \mathfrak{A}'$ で dense である。

Proposition 6．$\mathfrak{A}$ が commutative self-adjoint algebra ならば

(i) $A^* = \bar{A}$, for $\forall$ symmetric operator $A \in \mathfrak{A}$,

(ii) $A^* = \overline{A^\#}$, for $\forall$ $A \in \mathfrak{A}$.

Proof．(i)．$A \in \mathfrak{A}$ を symmetric operator とする。$\overline{A + iI}$ の polar decomposition を UP とする。U は H から $\overline{\mathcal{R}(A+iI)}$ への isometry である。まず $U \in (\mathfrak{A}')_b{}^c$ を示す。任意の unitary operator $V \in (\mathfrak{A}')_b$ に対し，$\mathfrak{D}$ 上で $(A + iI)V = V(A+iI)$．従って

$$V^*(A+iI)V = A+iI.$$

両辺の closure をとって

$$V^*(\overline{A+iI})V = \overline{A+iI}$$

$$\therefore \ (V^*UV)(V^*HV) = UH.$$

polar decomposition の一意性より

$$V^*UV = U, \quad \text{すなわち} \quad UV = VU.$$

従って $U \in (\mathfrak{A}')_b{}^c = \mathfrak{A}_b{}^{cc}$.

$\mathfrak{A}_b{}^{cc}$ は仮定より commutative であるから,

$$UU^* = U^*U.$$

ゆえに $H = \overline{\mathcal{R}(A+iI)}$ であり, A の positive deficiency は 0 である。

同様に $H = \overline{\mathcal{R}(A-iI)}$ が示されるから, A は essentially self-adjoint である。

(ii) 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対し

$$H_1 = A^{\#*}\bar{A}^{\#} \supset AA^{\#}$$

$$H_2 = \bar{A}A^* \supset AA^{\#}.$$

上に示したことから, $AA^{\#}$ は essentially self-adjoint であるから $H_1 = \overline{AA^{\#}} = H_2$.

ゆえに $\mathcal{D}(\overline{A^{\#}}) = \mathcal{D}(H_1^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}(H_2^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}(A^*)$.

$$\therefore \quad \overline{A^{\#}} = A^*.$$

Remark. 逆に, symmetric algebra $\mathfrak{A}$ について (ii) が成立すれば

$$\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathcal{D}(\bar{A}) = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathcal{D}(A^*)$$

であるから, これをあらためて $\mathfrak{D}$ ととれば, $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である。