数理解析研究所講究録
第 210 巻 1974 年 55-57

作用素のn乗根と周期的な自己同型写像

東北大 教養　岡安隆照

C^*-代数の周期的な自己同型写像(involutionを保つ)の構造を調べたいのだが思うにまかせない. 以下幾つかの"不十分な"結論を述べることにする.

§1. 作用素のn乗根. 我々はBanach空間の上の, ある好都合な条件を満たしている作用素については其のn乗根をほぼ完全に記述することが出来る. 特にBanach *-代数の周期的な自己同型写像の構造をみることが出来る.

定理1. SをBanach空間Xの上の有界作用素とする.

(a) 原点から出ていて無限遠点に向う, 自分自身と交わらない曲線Cが次の条件を満足するとする:

$$Sp(S)\cap C=\phi \quad 且 \quad e^{\frac{2\pi}{n}i}C\cap C=\{0\}.$$

このときSと恒等作用素Iが生成する, X上の作用素の閉可

換環の中に S の n 乗根 $R_0, R_1, \cdots, R_{n-1}$ で $Sp(R_k) \subset D_k$ を満たすものがある．しかもこの条件を満たして S と可換な $R_0, R_1, \cdots, R_{n-1}$ は一意である．ここに各 D_k は，原点から出ている n 個の曲線 $\{z^{\frac{1}{n}} ; z \in \mathbb{C}, \neq 0\} \cup \{0\}$ の隣り合った2つを境界とする領域である．

(b) 更に X 上の作用素 T が $T^n = S$ を満たしていれば，X 上の互に直交し，S と可換な巾等作用素 $E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$ で $\sum_{k=0}^{n-1} E_k = I$ を満たすものが存在して $T = \sum_{k=0}^{n-1} R_k E_k$ である．

系．Banach *-代数 A の有界な自己同型写像 α が周期 n をもつための必要十分条件は，1 の n 乗根 ζ_k を添字とする，線型独立で A を張る A の部分空間 $A_{\zeta_0}, A_{\zeta_1}, \cdots, A_{\zeta_{n-1}}$ が

$$A_{\zeta_i} A_{\zeta_j} \subseteq A_{\zeta_i \zeta_j} \quad \text{且} \quad A_{\zeta_i}^* \subseteq A_{\bar{\zeta}_i}$$

を満足しつつ存在して

$$\alpha(x) = \zeta_k x \quad \text{for} \quad x \in A_{\zeta_k}$$

となることである．

§2．C*-代数の周期的な自己同型写像．定理1を C*-代数の spatial な自己同型写像で周期的なものに応用すると次のようなことになるがきれいな形ではない：一つの Hilbert

空間に作用している C^*-代数 A の自己同型写像 α が周期 n をもち, 作用素 U で定義されているとするとき, U^n の spectrum が"切れて"いれば, α は恒等作用素 I の n 乗根で定義される. 一般にはどうであろうか. α が weakly inner ならばよいことはわかる:

定理2. 一つの Hilbert 空間に作用している C^*-代数の weakly inner なる自己同型写像が周期 n をもてば, それは恒等作用素 I の n 乗根によって定義される.

実は著者はこれを最初 GCR の permanently weakly inner なる自己同型写像について述べたのであるが, 上の形でよいことを荒木不二洋教授(数理解析研究所)の御指摘によって知った.