数理解析研究所講究録
第 211 巻 1974 年 75-82

W. A. Manning の定理について

北大 理　岩崎 史郎

1. 序

１９２０年代の後半，W. A. Manning は２重可移でない原始置換群に関するいくつかの定理を得たが，ここでは，次の定理に注目して話をすすめたいと思う．

“２重可移でない原始置換群 (G, Ω) に於て，Ω の１点 α の stabilizer $G_\alpha = \{ g \in G \mid \alpha^g = \alpha \}$ は，Ω 上で $\{\alpha\}$ の他に２つ以上の orbits を持つが，ある orbit（その長さを $v > 2$ とする）の上に２重可移に作用すれば，G_α は長さが v より大きく，$v(v-1)$ の約数であるような orbit を持つ．”（[5]）

この定理は，１点の stabilizer が２重可移に作用するような orbit を持てば，この orbit にかなり規定されるようなもう１つの orbit があることを言っているので，たとえば，２重可移群の rank ３以上の原始拡大を扱うときなど，しばしば有効である（大袈裟ながら、因に，近年発見された単純群の多くは，既知の単純群の rank ３，５の原始拡大として得ら

れる). この定理は, 近年 P. J. Cameron によって, design や graph 的な考えを使って再証明・精密化されたが, ここでは, その簡単な説明・応用と, 1点の stabilizer がある orbit の上に2重可移に作用していない場合でも, 類似の結果が成り立つことを話したいと思う.

用語の定義

2重可移でない原始置換群を uniprimitive 群という.

置換群 (G, Ω) に於て, Ω の部分集合 S に対し,

$G_S = \{ g \in G \mid \forall \alpha \in S,\ \alpha^g = \alpha \}$: S の pointwise stabilizer.

以下, (G, Ω) を可移置換群とする.

G_α $(\alpha \in \Omega)$ の Ω 上での orbits ($\{\alpha\}$ 自身も含めて) の個数 r を (G, Ω) の rank という (G の可移性より, r は α のとり方によらない). r 個の G_α-orbits $\Gamma_0(\alpha) = \{\alpha\}$, $\Gamma_1(\alpha)$, $\cdots$, $\Gamma_{r-1}(\alpha)$ を G の suborbits, それらの長さを G の subdegrees という ($\forall i$, $\forall g \in G$ に対し, $\Gamma_i(\alpha)^g = \Gamma_i(\alpha^g)$ となるように $\Gamma_i(\alpha)$ を番号付けることができる). $\Gamma_i(\alpha)$ に対し,

$$\Gamma_i'(\alpha) = \{ \alpha^g \mid g \in G,\ \alpha^{g^{-1}} \in \Gamma_i(\alpha) \}$$

も G_α-orbit で, $\Gamma_i(\alpha)$ の paired orbit という. $\Gamma_i''(\alpha) = \Gamma_i(\alpha)$, $|\Gamma_i'(\alpha)| = |\Gamma_i(\alpha)|$ である. $\Gamma_i'(\alpha) = \Gamma_i(\alpha)$ のとき, $\Gamma_i(\alpha)$ は self-paired という.

Γ_i, Γ_j に対し,

$(\Gamma_i \circ \Gamma_j)(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid \beta \neq \alpha,\ \exists \gamma \in \Omega;\ \gamma \in \Gamma_i(\alpha),\ \beta \in \Gamma_j(\gamma)\}$

(これは, いくつかの G_α-orbits の和集合である)

2. Cameron の定理 (Manning の定理の精密化)

はじめに述べた Manning の定理は, Cameron によって次のように精密化された.

定理 (P. J. Cameron [2], [3])

(G, Ω): uniprimitive 群

$\alpha \in \Omega$ の stabilizer G_α がある orbit $\Gamma(\alpha)$ 上に $t\,(\geqq 2)$ 重可移に作用しており, $|\Gamma(\alpha)| = v > 2$ とすると, 次のことが成り立つ.

(i) $(\Gamma' \circ \Gamma)(\alpha)$ は self-paired な G_α-orbit で, $\beta \in \Gamma(\alpha)$ に対し $|(\Gamma' \circ \Gamma)(\beta) \cap \Gamma(\alpha)| = v - 1$. $l = |(\Gamma' \circ \Gamma)(\alpha)|$ は $v(v-1)$ の約数で $l = v(v-1)/k$ とおくと $k \leqq (v-1)/2$ 即ち $l \geqq 2v$.

また. $k = (v-1)/2 \Longrightarrow k = 1$ or 2.

(ii) $t \geqq 3$ ならば

(a) $k = 1$ or 2. または

(b) (G, Ω) は rank 3 で, ある正整数 λ があって,

$|\Omega| = (\lambda+1)^2(\lambda+4)^2$, $v = (\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+5)$, $k = (\lambda+1)(\lambda+2)$

とかける．（このとき，$\lambda=1$ ならば $|\Omega|=100$，$G\cong HS$（Higman-Sims の単純群）or $G\cong Aut(HS)$））

(iii) $t\geqq 4 \Longrightarrow k=1$ or 2.

(iv) $t\geqq v-2$（即ち，$G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\supseteq\Gamma(\alpha)$ 上の交代群）ならば

(a) $k=1$，または

(b) $k=2$；$v=$ 奇数，$|\Omega|=2^{v-1}$，(G,Ω) は rank $(v+1)/2$ で，G は elementary abelian regular normal subgroup をもつ．

（(iv) は榎本彦衛氏も独立に得ている）

証明は，$\Delta=\Gamma\circ\Gamma'$ とし，Ω の点 α を 1 つ固定して，$\Gamma(\alpha)$ の元を点，$\Delta(\alpha)$ の元を blocks とし，$\gamma\in\Gamma(\alpha)$ が $\delta\in\Delta(\alpha)$ と incident $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\gamma\in\Gamma(\delta)$ なる design をつくって行うようである．

ところで，self-paired でない suborbit をもつ rank 4 の原始置換群で知られているものとして，$G=PSU(3,3^2)$，$G_\alpha=PSL(3,2)$（subdegrees は $1,\underbrace{7,7}_{paired},21$ で，G_α は長さ 7 の orbit の上に 2 重可移に作用している）がある．この群を特徴づけようとしていくつかの試みがなされているが（今の所，Cameron [4] が最良と思われる），まだ，すっきり

した形ではできていないようである.

rank 4 の原始置換群 $\overset{G}{\text{で}}$, self-paired でない suborbit がある場合, 次のことがわかっている.

① subdegrees が $1, \underbrace{v, v}_{\text{paired}}, v(v-1)$ なるものはない.

② subdegrees が $1, \underbrace{v, v}_{\text{paired}}, v(v-1)/2 \Longrightarrow v=7,\ G_\alpha \cong PSL(3,2),\ G \cong PSU(3,3^2)$.

Cameron の定理 (i), (ii) と上の①, ② (または Cameron [4]) から直ちに次の結果が得られる.

系. self-paired でない suborbit をもつ rank 4 の原始置換群で, 1 点の stabilizer が non-trivial な 3 つの orbit の少くとも 1 つの上に 3 重可移に作用しているようなものは存在しない.

これは, 坂内 [1] を少し一般化している.

3. Manning の定理と類似な結果

$G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ が 2 重可移でなくても, Manning の定理と類似な結果が成り立つ;

命題. (G, Ω) : unipsimitive 群, $\alpha \in \Omega$.

$\Gamma(\alpha)\ (\neq \{\alpha\})$: 長さ v の G_α-orbit で,

$G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$: rank r ($\geqq 2$) group with subdegrees $1, v_1, \cdots, v_{r-1}$ ($v = 1 + v_1 + \cdots + v_{r-1}$).

更に，"$\Gamma(\alpha)$: self-paired" または "$|G_\alpha|$ = 偶数 かつ $|G_{\alpha\cup\Gamma(\alpha)}|$ = 奇数" とする.

$\Longrightarrow$ $\exists v_i$ ($1 \leqq i \leqq r-1$), $\exists \Delta(\alpha)$: G_α-orbit such that

$\Delta(\alpha)$ は $\Gamma(\alpha)$ とも $\Gamma'(\alpha)$ とも異なり，$\Delta(\alpha) \subseteq (\Gamma' \circ \Gamma)(\alpha)$.

$l = |\Delta(\alpha)| > v_i$ で l は $v v_i$ の約数.

$\beta \in \Gamma(\alpha)$ に対し，$v_i \leqq |\Delta(\beta) \cap \Gamma(\alpha)| = v_i$ + (v_i 以外のいくつかの v_j の和) $\leqq v - 1$. ($\because$ $|\Gamma(\beta) \cap \Gamma(\alpha)| = v_i$ 以外のいくつかの v_j の和 $\geqq 0$)

上の結果は 2 重可移でない群の rank 3 以上の原始拡大を考えるとき，いくらか有効である※が，証明はやさしいし，あまり内容はないかもしれない. uniprimitive 群 (G, Ω) に於て，1 つの G_α-orbit $\Gamma(\alpha) = \Gamma_1(\alpha)$ から出発して，上のように $\Delta(\alpha) = \Gamma_2(\alpha)$ をつくり，この $\Gamma_2(\alpha)$ から同じように $\Gamma_3(\alpha)$ を出し，… というようにして，はじめの $\Gamma(\alpha)$ にもどらないうちに全部の G_α-orbits が出てくるための条件がわかることが望ましいが，今の所筆者には全然わからない. しかし，rank 4 の原始置換群 (G, Ω) ですべての G_α-orbits が self-paired で $G_\alpha^{\Gamma_1(\alpha)}$ が 2 重可移なら，$\Gamma_1(\alpha)$ から出発して残り

の2つのG_α-orbit が出てくる.

参考文献

[1] E. Bannai : Primitive extensions of rank 4 of multiply transitive permutation groups, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 19 (1972) 151-154.

[2] P. J. Cameron : Proofs of some theorems of W. A. Manning, Bull. London Math. Soc. 1 (1969) 349-352

[3] —— : Permutation groups with multiply transitive suborbits, Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972) 427-440

[4] —— : Primitive groups with most suborbits doubly transitive, Geometriae Dedicata 1 (1973) 434-446.

[5] W. A. Manning : A theorem concerning simply transitive primitive groups, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929) 330-332.

※ たとえば, この命題と, D. G. Higman : Finite permutation groups of rank 3, Math. Z. 86 (1964) に基いて, 榎本彦衛氏が電子計算機を使って作製された rank 3 の置換群の可能性の表等から, 次のような置換群の rank 3 の

原始拡大は存在しない（ここで，群 G，部分群 H に対し，$(G, H\backslash G)$ は G の H による置換表現を表わすものとする）；

- $(M^c, PSU(4,3^2)\backslash M^c)$　（M^c は McLaughlin の単純群）
- $(HS, M_{22}\backslash HS)$　（HS は Higman-Sims の単純群）
- $(PSU(3,5^2), A_7\backslash PSU(3,5^2))$
- $(J, PSL(2,11)\backslash J)$　（J は位数 175560 の Janko 群）

　⋮

（はじめの 3 つは rank 3，あとの 1 つは rank 5 の原始置換群である.）