数理解析研究所講究録
第212巻 1974年 8-18

8

# 概周期系における安定性について

東北大 理　吉沢太郎

周期系において，周期解の存在を論ずるにあたり，有界な解の存在や解の終局有界性が十分条件であるが，概周期系の概周期解の存在をいうためには，有界な解の存在や終局有界性だけでは不十分である。そのため有界な解の安定性や分離条件が附加条件になる。

有界な解が totally stable ならば概周期解が存在することから，加藤，吉沢はどのような条件のもとで，有界な解が一様漸近安定ならば，それは totally stable になるかを考えた。ここでは，加藤の条件は実際に integrally asymptotic stability をあたえることを述べ，これに関連して有界な解の一様漸近安定との関係を考える。特に周期系においては，有界な解の一様漸近安定が Liapunov 函数の存在により特徴ずけられることを述べる。

概周期系を考えるまえに，一般な系の解の total (integral)

stability の定義をあたえる。微分方程式

(1) $x' = f(t, x)$, $f(t, 0) \equiv 0$, $x, f \in R^n$,

(2) $x' = f(t, x) + p(t)$

を考える。ここで $S_c = \{x ; |x| < c\}$ とし, $f(t, x)$ は $I \times S_c$, $I = [0, \infty)$, で連続, $p(t)$ は $I$ で連続とする。

定義 1. 任意の $\varepsilon > 0$, 任意の $t_0 \geqq 0$ そして任意の $p(t)$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|y_0| < \delta(\varepsilon)$, $|p(t)| < \delta(\varepsilon)$, $t \geqq t_0$ ( $\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \delta(\varepsilon)$ ) ならば, すべての $t \geqq t_0$ に対し, $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$ となるとき, (1) の零解は totally (integrally) stable である。ここで $y(t, t_0, y_0)$ は (2) の $(t_0, y_0)$ を通る解である。

定義 2. $\delta_0 > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqq 0$, $p(t)$ に対して $\eta(\varepsilon) > 0$ と $T(\varepsilon) > 0$ が存在して, $|y_0| < \delta_0$, $|p(t)| < \eta(\varepsilon)$, $t \geqq t_0$ ( $\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \eta(\varepsilon)$ ) ならば, すべての $t \geqq t_0 + T(\varepsilon)$ に対し, $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$ なるとき, (1) の零解は totally (integrally) attracting である。ここで $y(t, t_0, y_0)$ は (2) の解である。

定義 3. (1) の零解は, それが totally (integrally) stable で, かつ totally (integrally) attracting であるとき, totally (integrally) asymptotically stable であるといわれる。

あきらかに, totally (integrally) stable であれば, 一様安定で, totally (integrally) asymptotically stable であれば, 一様漸近安定

である。

さて，概周期系

(3) $$x' = f(t, x), \quad x, f \in R^n$$

を考える。ここで $f(t, x)$ は $R \times S_{B^*}$，$S_{B^*} = \{x;\ |x| < B^*\}$，において連続，$x \in S_{B^*}$ に対して一様に，$t$ に関して概周期的とする。さらに (3) は I 上で定義され，$|\varphi(t)| \leqq B$，$B < B^*$，$t \geqq 0$ であるような解 $\varphi(t)$ を持つと假定する。$f$ の *hull* を $H(f)$ で表わす。

ある数列 $\{\tau_k\}$，$\tau_k > 0$，に対して $k \to \infty$ とき，$S_{B^*}$ の任意のコンパクト集合 $S$ に対し，$f(t+\tau_k, x)$ は $R \times S$ 上で一様にある函数 $g(t, x)$ に収束し，I 上の任意のコンパクト集合上で，$\varphi(t+\tau_k)$ はある函数 $\psi(t)$ に一様に収束するとき，この事実を $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$ で表わす。このとき明らかに $g \in H(f)$ で $\psi(t)$ は

(4) $$x' = g(t, x)$$

の解で，すべての $t \geqq 0$ に対して $|\psi(t)| \leqq B$。

周期系

(5) $$x' = f(t, x), \quad f(t+\omega, x) = f(t, x)$$

においては，$\varphi(t)$ が一様安定であれば $\psi(t)$ もそうであり，$\varphi(t)$

が一様漸近安定であれば，$\psi(t)$ もそうである。概周期系 (3) においては，もしすべての $g\in H(f)$ に対して (4) の解が初期値問題に関して一意的であれば，$\varphi(t)$ が一様安定であれば，$\psi(t)$ もそうであり，一様漸近安定についても同じである。しかも，これらの場合，安定性の定義にあらわれる量 $\delta_0$, $\delta(\cdot)$, $T(\cdot)$ は共通なものがえらばれる。

概周期系 (3) に対して，つぎの定理は解 $\varphi(t)$ の一様漸近安定と *integrally asymptotic stability* とが同値である場合を示している。

<u>定理 1.</u> 概周期系 (3) に対して，すべての $(\psi, g)\in H(\varphi, f)$ に対し，$\psi$ は共通の $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$ をもち一様漸近安定であると仮定する。すると $\varphi(t)$ は *integrally asymptotically stable* である。このときはまた $\varphi(t)$ は *totally asymptotically stable* である。

この定理の証明はつぎの補題をつかうことによりなされる。

<u>補題 1.</u> すべての $(\psi, g)\in H(\varphi, f)$ に対し，$\psi$ は共通の $\delta(\cdot)$ をもち一様安定であると仮定する。すると任意の $\varepsilon>0$，$T>0$ に対して，正の数 $\eta_1(\varepsilon)$, $\eta_2(\varepsilon, T)$ が存在して，任意の $t_0\geq 0$ に対し，$|y(t_0)-\varphi(t_0)|<\eta_1(\varepsilon)$，$\int_{t_0}^{t_0+T}|p(t)|dt<\eta_2(\varepsilon, T)$ ならば，$[t_0, t_0+T]$ 上で $|y(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$。ここで $p(t)$ は $I$ 上で *locally integrable* で，$y(t)$ は

$$(6) \qquad y' = f(t, y) + p(t)$$

の解である。

補題2. すべての $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$ に対して，$\psi$ は共通の $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$ をもち一様漸近安定であると假定する。すると $\eta_0$ が存在し，任意の $\varepsilon > 0$，$t_0 \geqq 0$ に対し，$\eta_3(\varepsilon)$ が存在して，もし $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \eta_0$，$\int_{t_0}^{t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})} |p(t)| dt < \eta_3(\varepsilon)$ ならば，(6) の解 $y(t)$ は $[t_0, t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})]$ 上で存在し，かつ

$$|y(t_0 + T(\tfrac{\varepsilon}{2})) - \varphi(t_0 + T(\tfrac{\varepsilon}{2}))| < \varepsilon。$$

補題1は，$\eta_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \delta(\frac{\varepsilon}{2})$ とし，この $\eta_1(\varepsilon)$ に対して補題1における $\eta_2(\varepsilon, T)$ がないと仮定して矛盾を導くことにより証明される。補題2も同様の論法により証明される。すなわち，

$$\eta_0 = \min\left(\delta_0, \eta_1\left(\frac{B^* - B}{2}\right)\right)$$

とし，任意の $t_0 \geqq 0$ に対し，$|\varphi(t_0) - y(t_0)| < \eta_0$ で

$$\int_{t_0}^{t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})} |p(t)| dt < \eta_3(\varepsilon), \quad \eta_3(\varepsilon) \leqq \eta_2\left(\frac{B^* - B}{2}, T(\tfrac{\varepsilon}{2})\right)$$

ならば，$|y(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})) - \varphi(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2}))| < \varepsilon$ なるよう正の数 $\eta_3(\varepsilon)$ を見出すことが出来る。

定理1の証明の概略はつぎのようである。$\eta_1, \eta_2, \eta_0, \eta_3$ を

補題1, 2であたえられた数とし，

$$\rho(\varepsilon) = \min\{\eta_1(\varepsilon),\ \eta_0\},$$

$$\eta(\varepsilon) = \min\left\{\eta_2\left(\frac{B^*-B}{2},\ T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right),\ \eta_2\left(\varepsilon, T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right),\ \eta_3(\rho(\varepsilon))\right\}$$

とおく。任意の $t_0 \geqq 0$ に対し，(6)の解 $y(t)$ は，$|\varphi(t_0)-y(t_0)| < \eta_0$，$\int_{t_0}^{\infty}|p(t)|dt < \eta(\varepsilon)$ ならば，$t \geqq t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$ に対し $|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon$ をみたすことを示す。$\eta_0 \leqq \eta_1\left(\frac{B^*-B}{2}\right)$，$\eta(\varepsilon) \leqq \eta_2\left(\frac{B^*-B}{2}, T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right)$ であるから，補題1により

$$|\varphi(t) - y(t)| < \frac{B^*-B}{2}, \quad t_0 \leqq t \leqq t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)。$$

さらに補題2により，

$$\left|\varphi\left(t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right) - y\left(t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right)\right| < \rho(\varepsilon) .$$

区間 $t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right) \leqq t \leqq t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$ 上で補題1を適用して，

$$|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right) \leqq t \leqq t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$$

また補題2により，

$$\left|\varphi\left(t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right) - y\left(t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right)\right| < \rho(\varepsilon)。$$

これをくり返すことにより，$t \geqq t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$ に対し，$|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon$ なることがわかる。

<u>系 1</u> 概周期系 (3) において，すべての $g \in H(f)$ に対し，(4) の解は初期値に関し一意的であると仮定する。このとき，$\varphi(t)$ が一様漸近安定ならば，$\varphi(t)$ は totally (integrally) asymptotically stable である。すなわちこれらの安定性は同値である。

周期系 (5) においては，$\varphi(t)$ が一様漸近安定ならば，附加条件なしで，$\psi(t)$ が共通の $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$ をもち一様漸近安定であるから，つぎの定理がえられる。

<u>定理 2.</u> 周期系 (5) は $|\varphi(t)| \leqq B$, $B < B^*$, $t \geqq 0$ である解をもつとする。もし $\varphi(t)$ が一様漸近安定ならば，$\varphi(t)$ は totally (integrally) asymptotically stable である。すなわちこれらの安定性は同値である。

一般の系に対して，integrally asymptotic stability はある性質をもつ Liapunov function の存在により特性ずけられるから，周期系 (5) に対して，つぎの定理が成りたつ。

<u>定理 3.</u> 周期系 (5) において，$\varphi(t)$ が一様漸近安定であるための必要十分条件は，ある $\alpha > 0$ に対し，$0 \leqq t < \infty$, $|\varphi(t) - x| < \alpha$ で定義され，つぎの性質をもつ Liapunov function $V(t, x)$ が存在することである。すなわち

(i) $a(|\varphi(t) - x|) \leqq V(t, x) \leqq |\varphi(t) - x|$，ここで $a(r)$ は連続，正定値，

(ii) $|V(t, x) - V(t, y)| \leqq |x - y|$，

(iii) $\dot{V}_{(5)}(t,x) \leqq -V(t,x)$ 。

そこで，一般の系 (1) を考える。 $0<a<c$, $S_a=\{x;|x|<a\}$ として，各 $t\in(0,\infty)$, $x\in S_a$ に対し，$A_a(t,x)$ でつぎの条件をみたす絶対連続な函数 $\varphi: I\to R^n$ の集合を表わす。すなわち

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(t)=x, \quad \sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)|\leqq a 。$$

Liapunov function $V(t,x)$ をつぎのように定義する。

$$V(t,x)=\begin{cases}\inf\limits_{\varphi\in A_a(t,x)}\displaystyle\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}|\varphi'(u)-f(u,\varphi(u))|\,du, & t>0\\ |x|, & t=0\end{cases},$$

ここで $\lambda\geqq 0$ は定数。この函数 $V(t,x)$ はつぎの性質をもっている。

(I) $\tau>0$, $\xi\in S_a$ に対し，$x(0)=0$, $x(\tau)=\xi$, $0\leqq t\leqq\tau$ で $|x(t)|\leqq a$ である (1) の解が存在するための必要十分条件は $V(\tau,\xi)=0$。

(II) 任意の $t\geqq s>0$, $x,y\in S_a$ に対し

$$|V(s,x)-V(t,y)|\leqq|x-y|+|s-t|M(t)+(1-e^{-\lambda(t-s)})a,$$

ここで，$M(\tau)=\max\{|f(t,x)|;\ 0\leqq t\leqq\tau,\ |x|\leqq a\}$。

(III) $V(t,x)\geqq e^{-\lambda t}|x|-tM(t)$。

(IV) $0\leqq t<\infty$, $|x|<a$ に対し，

$$\dot V_{(1)}(t,x) \leqq -\lambda V(t,x)。$$

<u>定理 4.</u> もし(1)の零解が integrally stable ならば，ある $a$，$0<a<c$ に対し，$I\times S_a$ で定義されてつぎの条件をみたすような Liapunov function $V(t,x)$ が存在する。すなわち，

(i) $b(|x|) \leqq V(t,x) \leqq |x|$，　ここで $b(r)$ は連続で正定値，

(ii) $|V(t,x)-V(t,y)| \leqq |x-y|$，

(iii) $\dot V_{(1)}(t,x) \leqq 0$。

この場合は $\lambda=0$ として上述の Liapunov function $V(t,x)$ を定義すれば，つぎの定理の証明におけると同様にして，このV$(t,x)$ が条件をみたすことが示される。

<u>定理 5.</u> もし(1)の零解が右に一意的で，integrally attracting ならば，ある $a$，$0<a<c$，に対し，$I\times S_a$ で定義されてつぎの条件をみたす Liapunov function $V(t,x)$ が存在する。すなわち，

(i) $b(|x|) \leqq V(t,x) \leqq |x|$，ここで $b(r)$ は連続で正定値，

(ii) $|V(t,x)-V(t,y)| \leqq |x-y|$，

(iii) $\dot V_{(1)}(t,x) \leqq -V(t,x)$．

<u>証明</u> 定義2における $\delta_0$ に対し，$\delta_0^*<\delta_0$，$a=\delta_0^*$ とする。$\lambda=1$ として上述の Liapunov function $V(t,x)$ を定義すれば，この函数の性質として，条件(ii)，(iii) および $V(t,x)\leqq|x|$ をみたすことは明らかで，零解の一意性により $V(t,0)=0$ で

あるから，$V(t,x)$ の正定値性を示せばよい。もしそうでないとすれば，ある $\varepsilon$，$0<\varepsilon<\delta_0^*$，と $\varepsilon \leqq |x_k| < \delta_0^*$，$t_k \to \infty$ $(k\to\infty)$，$V(t_k,x_k)\to 0$ $(k\to\infty)$ となるような数列 $\{t_k\}$，$\{x_k\}$ が存在する。$T(\varepsilon)$，$\eta(\varepsilon)$ を定義2における数とする。$t_k > T(\varepsilon)+1$，$V(t_k,x_k)<\eta(\varepsilon)e^{-(T(\varepsilon)+1)}$ となる十分大きい $k$ を考え，

$$\int_0^{t_k} e^{-(t_k-u)}|\varphi_k'(u)-f(u,\varphi_k(u))|du < \eta(\varepsilon)e^{-(T(\varepsilon)+1)}$$

である $\varphi_k \in A_a(t_k,x_k)$ をえらぶ。$t_0=t_k-(T(\varepsilon)+1)$ とおくと，

$$\int_{t_0}^{t_k} e^{-(t_k-u)}|\varphi_k'(u)-f(u,\varphi_k(u))|du < \eta(\varepsilon)e^{-(T(\varepsilon)+1)},$$

$$e^{-(T(\varepsilon)+1)}\int_{t_0}^{t_k}|\varphi_k'(u)-f(u,\varphi_k(u))|du \leqq \int_{t_0}^{t_k} e^{-(t_k-u)}|\varphi_k'(u)-f(u,\varphi_k(u))|du$$

であるから，

$$\int_{t_0}^{t_k}|\varphi_k'(u)-f(u,\varphi_k(u))|du < \eta(\varepsilon)。$$

ここで $p(t)$ を

$$p(t)=\begin{cases}\varphi_k'(t)-f(t,\varphi_k(t)), & t\in[t_0,t_k]\\ 0, & t\in(t_k,\infty)\end{cases}$$

で定義すれば，$\int_{t_0}^{\infty}|p(t)|dt<\eta(\varepsilon)$ で $\varphi_k(t)$ は $x'=f(t,x)+p(t)$ の $t_0\leqq t\leqq t_k$ 上の解で，$|\varphi_k(t_0)|<\delta_0$。しかるに $|\varphi_k(t_k)|=|x_k|>\varepsilon$ で，

$t_R > t_0 + T(\varepsilon)$ であるから integral attraction の定義に矛盾する。したがって、ある正定値函数 $b(r)$ が存在し、 $b(|x|) \leqq V(t, x)$ となる。

$p: I \to R^n$ を可測で、

$$\sup_{t \geqq 0} \int_t^{t+1} |p(s)| ds < \infty$$

なる函数と、ノルムを $|p| = \sup_{t \geqq 0} \int_t^{t+1} |p(s)| ds$ として、このような函数の空間をBとする。すると(1)の零解が integrally asymptotically stable ならば、系(1)は空間Bの下でも perturbation 可能である。これは定理5における Liapunov function を用いることにより示される。