数理解析研究所講究録
第 214 巻 1974 年 1-16

円柱のまわりの流れに対するM^2展開解の近似度

電機大　桜井　明

§1. 序

二次元の任意物体を過ぎる縮む流体の音よりもおそい流れを考える。(u, v) を速度の (x, y) 成分、F を複素速度ポテンシャル、ρ を密度、複素速度 $q = u + iv$ とすると、基礎の運動方程式は [1] により、

$$(1.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(1-\rho)q \quad , \quad q = \dfrac{\partial}{\partial z}(F + \bar{F}) \\ \rho = \left\{1 - \dfrac{\gamma-1}{2}M^2(|q|^2 - 1)\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{cases}$$

但し $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $M > 0$ は一様流の Mach 数、$\gamma > 1$ は比熱の比をあらわし、無限遠の一様流の速度および密度を 1 としている。

さらに次の条件がある。

$$(1.2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} \text{ は流れの場で一価連續} \\ z \to \infty \text{ で } \dfrac{\partial F}{\partial z} \to 1 \text{ 、物体表面で } \mathrm{Im}\{F\} = 0 \end{cases}$$

上の問題のM^2展開解は次のように求められる［1］。まづ、縮まない流体に対する複素速度ポテンシャルを F_0（$= F_0(z)$）として

$$(1.3)\quad F = F_0 + M^2 F_1 + M^4 F_2 + \cdots$$

とおき、これを（1.1）に代入し、その展開のMの同次の項を比較すると、$N = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$(1.4)\quad \frac{\partial F_N}{\partial \bar{z}} = f_{N-1}$$

となる。ここで f_{N-1} は $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_{N-1}$ のみを含む。これから $H_N(z, \bar{z}) = \int f_{N-1}\, d\bar{z}$ を $\frac{\partial H_N}{\partial z}$ が流れの場で一価連續、かつ $z \to \infty$ で 0 に近づくようにきめ、さらに $G_N(z)$ を物体表面で $I_m\{H_N + G_N\} = 0$ 物体外で z の解析函数でかつ $z \to \infty$ で $\frac{dG_N}{dz} \to 0$ ときめ、

$$(1.5)\quad F_N = H_N(z, \bar{z}) + G_N(z)$$

とすると（1.3）のFは條件（1.2）を満足する。

とくに、單位円柱で循環のない場合、

$$(1.6)\quad \begin{cases} F_0 = z + \frac{1}{z}, \quad H_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z^2}\right) + \frac{1}{12}\frac{1}{\bar{z}^3}\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2\bar{z}} \\ \qquad G_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{5}{6}\frac{1}{z}, \quad \cdots \\ q = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2} + M^2\left[-\frac{1}{4z^2} - \frac{13}{12}\frac{1}{\bar{z}^2} - \frac{1}{4\bar{z}^4} + \frac{z}{2\bar{z}^3} \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{\bar{z}^3 z} + \frac{1}{2z^2\bar{z}^2} - \frac{1}{6z^3\bar{z}^3} - \frac{1}{4z^2\bar{z}^4}\right] \\ \qquad + \cdots. \end{cases}$$

さて、このような近似解の近似度を調べるために、次のように、一般に「近似法の適当性」あるいは「適当な解」といったものを考える。

まづ、X, Y をノルム空間、$D \subset X$, $T: D \to Y$, $\varepsilon, \varepsilon'$ を与えられた小さな正数とし

(1.7) $$S = \{x \mid \|Tx\| < \varepsilon',\ x \in D\} \neq \phi$$

とする。いま、任意の $x, x' \in S$ に対して $\|x - x'\| < \varepsilon$ のとき、方程式 $Tx = 0$ は「$\varepsilon, \varepsilon'$−適当」あるいは單に「適当」とし、そのとき任意の $x \in S$ を $Tx = 0$ の「適当な解」(Appropriate Solution)と名付ける。

ここで S は $Tx = 0$ を滿足する x という、普通の解の考えを Tx に ε' の大さまでの残差を許すような x にまで拡張したものであり、また、その適当性は、そのような x があまり散ばらないことを意味している。因みに $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ のときは一意の解が存在している。このような解の概念の拡張は科学や工学の分野で広く使われている色々な近似解法を基礎づけるために導入されたものであり[2](解の定義の上の形については藤田宏教授に負うところが多い)、たとえば、$Tx = 0$ は与えられた特定の近似解法に、D はそれによって与えられる近似解に対応している。また適当性は与えられた ε(解の精度)に対して ε' を定め、それに

よつて必要な逐次近似の回数を求めるなどに利用することが出来る。

§2. 単位円柱を過る循環のない流れ.

以下ではまづ、M^2展開解（1.6）を一般に含むような D を導入し、$q=1-\frac{1}{z^2}+Q$，$Q\in D$ のとき (1.1) で $(1-\rho)q\in D$ を示す。次に、$h\in D$ のとき $\frac{\partial F}{\partial z}=h$ と（1.2）を満足する F を §1 で述べた今井のM^2展開法の式（1.5）を応用して求める。さらに $q=\frac{\partial}{\partial z}(F+\bar{F})$ によつて q を定め $q=1-\frac{1}{z^2}+Q$ とすると $Q\in D$ となり、そこで $Q=Nh$，$N:D\to D$ は有界線形となることがわかる。以上を利用して (1.1)，（1.2）をM^2展開法の式 $Q=N\{\frac{1}{2}(1-\rho)q\}$ に変換し、さらに $TQ=Q-N\{\frac{1}{2}(1-\rho)q\}$，$T:D\to D$ として $Q\in D$ について $TQ=0$ が適当である條件を求める。

速度場

$X=\{f\}$ を以下のような f を要素とするノルム空間とする。$f=f(r,\theta)$，$1\leq r<\infty$ で、θ については 2πー周期の複素数値をとる連續関数で

$$(2\cdot1)\quad \|f\|=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sup_{1\leq r<\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta)e^{-im\theta}d\theta\right|<\infty$$

X についての以下の性質は自明である。

(2.2) $\|\bar{f}\| = \|f\|$

(2.3) $f, g \in X$ なら $fg \in X$ で $\|fg\| \le \|f\|\|g\|$

(2.4) $r^\alpha f \in X$, $\beta < \alpha$ なら $r^\beta f \in X$, $\|r^\beta f\| \le \|r^\alpha f\|$

次に

(2.5) $D = \{Q \mid rQ \in X, \mathcal{R}(e^{-i\theta}Q)_{r=1} = 0\}$

とする。いま $Q \in D$, $q = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2} + Q$ とすれば

$q \in X$ であるが $z \to \infty$ のとき $q \to 1$ また

$\mathcal{R}(e^{-i\theta}q)_{r=1} = 0$ で q は単位円柱を過ぎる流れに対する境界条件を満足している。また

(2.6) $A = 2 + \|rQ\|$ として $|q| \le \|q\| \le A$

<u>$(1-\rho)q \in D$</u>

以下で $Q \in D$, $q = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2} + Q$ とし

(2.7) $\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2(A^2-1) < 1$ 従って $\rho > 0$ とする。

まず $\mathcal{R}\{e^{-i\theta}(1-\rho)q\}_{r=1} = 0$ は明か。次に (1.1), (2.7) から

$$(2.8)\quad \begin{cases} 1 - \rho = \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell \left\{\frac{\gamma-1}{2} M^2(|q|^2 - 1)\right\}^\ell \\ \text{但し}\quad C_\ell = -\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{\gamma-1} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{\gamma-1} - \ell + 1\right) \end{cases}$$

ところで $|q|^2 - 1 = Q\bar{Q} + Q + \bar{Q} - \frac{Q}{z^2} - \frac{\bar{Q}}{\bar{z}^2} + \frac{1}{z^2\bar{z}^2} - \frac{1}{\bar{z}^2} - \frac{1}{z^2}$

$rQ \in X$

従って $r(|q|^2 - 1) \in X$ で (2.6) から

$$\|r(|q|^2-1)\| \le \|rQ\|^2 + 4\|rQ\| + 3 = A^2 - 1$$

従って (2.8) から $r(1-\rho) \in X$ で

$$\| r(1-\rho) \| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |c_\ell| \left\{ \tfrac{\gamma-1}{2} M^2 (A^2-1) \right\}^\ell$$

従って $(1-\rho)g \in D$ で

(2.9) $\quad \| r(1-\rho)g \| \leq A\, K\left(\tfrac{\gamma-1}{2} M^2 (A^2-1) \right)$

但し $K(X) = \sum_{\ell=1}^{\infty} |c_\ell| X^\ell$ であるが、$\rho(X) = (1-X)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

とし

$$K(X) = \begin{cases} \rho(X) - 1 + \dfrac{2}{\gamma-1} X, & 2 \geq \gamma \geq \dfrac{3}{2} \\ 1 - \rho(X) + \dfrac{2-\gamma}{(\gamma-1)^2} X^2, & \dfrac{3}{2} \geq \gamma \geq \dfrac{4}{3} \\ \cdots & \end{cases}$$

$\frac{\partial F}{\partial \bar z} = h,\ h \in D$ の解

$h \in D$ とし $\frac{\partial F}{\partial \bar z} = h$ と条件 (1.2) を満足する F を求める。まづ $F = z + \frac{1}{z} + F'$ とおくと F' に対する条件は $z \to \infty$ に対する条件が $\frac{\partial F'}{\partial z} \to 0$ となる以外 F に対するものと同じである。

さて $\sigma = e^{i\theta}$ とし、一般に

(2.10) $\quad (\quad)_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\quad) \sigma^{-m} d\theta, \quad m = 0, \pm 1, \cdots$

とし $\quad a_m = \sup_{1 \leq r < \infty} r |h_m| \quad$ とする。

(2.11) $\quad H(z, \bar z) = \int_{\infty}^{\bar z} \left(\sum_{m=2}^{\infty} h_m \sigma^m \right) d\bar z + \int_{\frac{1}{z}}^{\bar z} \left(\sum_{m=-\infty}^{1} h_m \sigma^m \right) d\bar z$

とおく。ここで明かに $\frac{\partial H}{\partial \bar z} = h$ であるが、H のこのよ

うな作り方は〔3〕で Φ（軸対称流のポテンシャル）を求める方法に対応している。

$r=\sqrt{z\bar{z}}$ ， $\sigma = r/z$ ， $d\bar{z}=\frac{1}{z}d(z\bar{z})=\frac{1}{z}dr^2$

であるから

$$H(z,\bar{z})=\int_{\infty}^{z\bar{z}}\left\{\sum_{m=2}^{\infty}h_m(\eta)z^m\eta^{-m}\right\}\frac{d\eta^2}{z}+\int_{1}^{z\bar{z}}\left\{\sum_{m=-\infty}^{1}h_m(\eta)z^m\eta^{-m}\right\}\frac{d\eta^2}{z}$$

となるが、 $rh\in X$ から両級数の積分範囲での収束は一様で

$$(2.12)\quad H(z,\bar{z})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^{m-1}\int_{k_m}^{z\bar{z}}h_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2$$

但し $k_m=\begin{cases}\infty, & m>1\\ 1, & m\leq 1\end{cases}$

次に $\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{m-1}\int_{k_m}^{z\bar{z}}h_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2\right)$

$$=(m-1)z^{m-2}\int_{k_m}^{z\bar{z}}h_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2+\frac{\bar{z}}{z}\sigma^m h_m(r)$$

また $\left|(m-1)z^{m-2}\int_{k_m}^{z\bar{z}}h_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2\right|$

$$\leq 2a_m r^{m-2}\left|(m-1)\int_{k_m}^{r}\eta^{-m}d\eta\right|$$

$$\leq \frac{2}{r}a_m$$

従って

$$(2.13)\quad \frac{\partial H}{\partial z}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m-1)z^{m-2}\int_{k_m}^{z\bar{z}} h_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2+\frac{\bar{z}}{z}h$$

であり、これは一価連續、また $z\to\infty$ のとき 0 となる。

ここで (1.5) の G_N に対応して $G(z)$ をきめると

$$(2.14)\quad G(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{-(m-1)}\int_{\infty}^{1}\bar{h}_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2+C$$

C : 任意の実定数

従って

$$(2.15)\quad F'=\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{m-1}\int_{k_m}^{z\bar{z}} h_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2 +\sum_{m=2}^{\infty} z^{-(m-1)}\int_{\infty}^{1}\bar{h}_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2+C$$

次に (1.1)、(2.7)、(2.13)、(2.14) から Q は

$$(2.16)\quad \begin{aligned} Q&=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(F'+\bar{F}') \\ &= h+\frac{\bar{z}}{z}\bar{h}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m-1)\bar{z}^{m-2}\int_{k_m}^{z\bar{z}}\bar{h}_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2 \\ &\quad -\sum_{m=2}^{\infty}(m-1)\bar{z}^{-m}\int_{\infty}^{1} h_m(\eta)\eta^{-m}d\eta^2 \end{aligned}$$

さて、明かに

$$(2.17)\quad \mathcal{R}\left(e^{-i\theta}Q\right)_{\eta=1}=0$$

また

$$Q_m = h_m + \bar{h}_{m-2} - (m-1)r^{-m}\left\{\int_{k_{-m+2}}^{r^2} \bar{h}_{-m+2}(\eta)\eta^{m-2} d\eta^2 + \int_{k_m}^{1} h_m(\eta)\eta^{-m} d\eta^2\right\}$$

であるが

$$\left| (m-1)r^{-m}\int_{k_{-m+2}}^{r^2} \bar{h}_{-m+2}(\eta)\eta^{m-2} d\eta^2 \right| \leq \frac{2}{r} a_{-m+2}$$

$$\left| (m-1)r^{-m}\int_{k_m}^{1} h_m(\eta)\eta^{-m} d\eta^2 \right| \leq \frac{2}{r} a_m$$

となるから

$$r|Q_m| \leq a_m + a_{m-2} + 2a_{-m+2} + 2a_m$$

ここで $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_m + a_{m-2} + 2a_{-m+2} + 2a_m) = 6\|rh\|$

従って $rQ \in X \quad , \|rQ\| \leq 6\|rh\|$

いま $Q = Nh \ , \ N : D \to D$ とすると

(2.18) N は有界線型で $\|N\| \leq 6$

$TQ \equiv Q - N\{\frac{1}{2}(1-\rho)q\} = 0$ の適当性

(2.19) $TQ \equiv Q - N\{\frac{1}{2}(1-\rho)q\} \ , \ T : D \to D$

とし、基礎式(1.1), (1.2)を $TQ=0$ と変形し、その適当性を考察する。

まづ $S=\{Q \mid \|\mathfrak{r}TQ\|<\varepsilon',\ Q\in D\}$ とし

任意の $Q\in S$ に対して (2.19), (2.9), (2.18) から

$$\|\mathfrak{r}Q\| \le \|N\|\cdot\|\mathfrak{r}\tfrac{1}{2}(1-\rho)q\| + \varepsilon'$$
$$\le 3A\cdot K\left(\tfrac{\gamma-1}{2}M^2(A^2-1)\right)+\varepsilon'$$

さらに (2.6) を用いて

$$(2.20)\qquad G(A;\gamma,M^2) \le 2+\varepsilon'$$

ここで $G(A;\gamma,M^2)=A\{1-3K(\tfrac{\gamma-1}{2}M^2(A^2-1))\}$

次に $Q, Q'\in D$ とし

$$q'=1-\frac{1}{z^2}+Q',\quad A'=\|\mathfrak{r}Q'\|+2,$$
$$\rho'=\{1-\tfrac{\gamma-1}{2}M^2(|q'|^2-1)\},\quad \tfrac{\gamma-1}{2}M^2(A'^2-1)<1$$

とすると、

$$(1-\rho')q'-(1-\rho)q=\sum_{\ell=1}^{\infty}C_\ell\left(\tfrac{\gamma-1}{2}M^2\right)^\ell\Delta(\ell)$$

ここで

$$\Delta(\ell)=(|q'|^2-1)^\ell q'-(|q|^2-1)^\ell q$$
$$=(|q'|^2-1)^\ell(Q'-Q)+q\{(Q'-Q)\bar{q}'+(\bar{Q}-\bar{Q}')q\}\times\sum_{j=0}^{\ell-1}(|q'|^2-1)^{\ell-1-j}(|q|^2-1)^j$$

であり $\Delta(\ell)\in D$ であるが、いま

$$\hat{A}=\mathrm{Max}\,(A,A')$$

とすると

$$\| \mathfrak{r} \Delta(\ell) \| \leq \| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| \{ (\tilde{A}^2-1)^\ell + 2\tilde{A}\ell(\tilde{A}^2-1)^{\ell-1} \}$$

従って　$\tilde{\alpha} = \frac{\gamma-1}{2} M^2 (\tilde{A}^2-1)$　として

$$\| \mathfrak{r}\{ (1-\rho')q' - (1-\rho)q \} \|$$

(2.21)
$$\leq \| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| \{ K(\tilde{\alpha}) + \tilde{A} \frac{d}{d\tilde{A}} K(\tilde{\alpha}) \}$$
$$= \| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| \frac{d}{d\tilde{A}} \tilde{A} K(\tilde{\alpha})$$

ここでさらに　$Q, Q' \in S$　とすると

$$\| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| = \| \mathfrak{r} [Q' - N\{ \tfrac{1}{2}(1-\rho')q' \}$$
$$- Q + N\{ \tfrac{1}{2}(1-\rho)q \}$$
$$+ \tfrac{1}{2} N\{ (1-\rho')q' - (1-\rho)q \}] \|$$
$$\leq 2\varepsilon' + 3 \| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| \frac{d}{d\tilde{A}} \tilde{A} K(\tilde{\alpha})$$

すなわち

$$\{ 1 - 3 \frac{d}{d\tilde{A}} \tilde{A} K(\tilde{\alpha}) \} \| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| \leq 2\varepsilon'$$

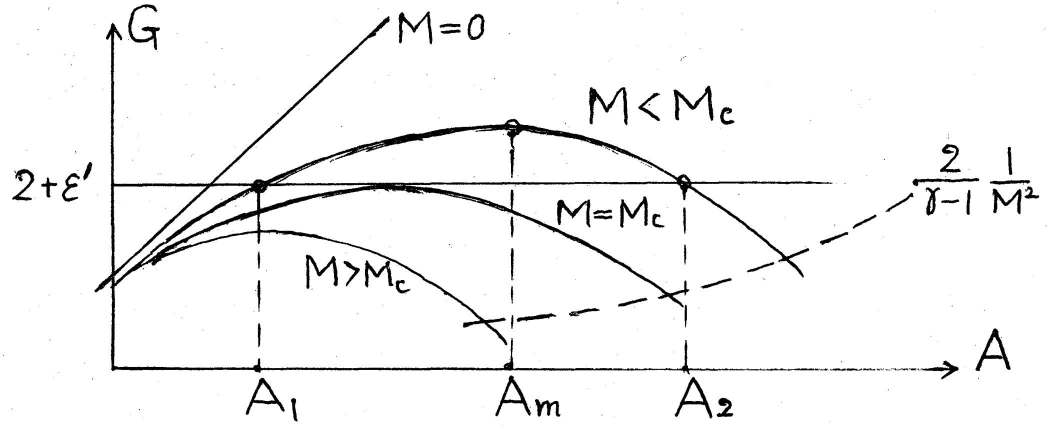
あるいは (2.20) より

(2.22)
$$\left(\frac{dG}{dA} \right)_{A=\tilde{A}} \| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| \leq 2\varepsilon'$$

従って
(2.23)　$\left(\frac{dG}{dA} \right)_{A=\tilde{A}} \geq \frac{2\varepsilon'}{\varepsilon}$　であれば $\| \mathfrak{r}(Q'-Q) \| \leq \varepsilon$

で　$TQ = 0$　は適当である。

ところで関数 $G(A;M^2,\gamma)$ の様子は下図に示すようになっている。



ここで γ は一定。

(2.24) A_m は $\left(\frac{dG}{dA}\right)_{A=A_m}=0$ の根

(2.25) M_c は $G(A_m;M_c,\gamma)=2+\varepsilon'$ の根

(2.26) A_1, A_2 $(A_1<A_2)$ は
$0<M<M_c$, $G(A;M,\gamma)=2+\varepsilon'$ の2根

さて、A は (2.20) を満足し、さらに

$$2<A<\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}$$

でなければならないから。上図より

$$\begin{cases} M<M_c \text{ のとき } & 2<A<A_1 \text{ か } A_2<A<\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2} \\ M>M_c \text{ のとき } & 2<A<\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2} \end{cases}$$

従つて $M<M_c$ なら $2<A<A_1$ にある解をえらぶことにより、与えられた ε（解の精度）に対して

$$\left(\frac{dG}{dA}\right)_{A=A_1}=\frac{2\varepsilon'}{\varepsilon}$$

となるように ε' を定めれば（2.23）が満足され、

$TQ=0$ は $\left(\varepsilon,\ \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{dG}{dA}\right)_{A=A_1}\right)$ − 適当となる。

具体的には

$$(2.27)\qquad G=2+\frac{\varepsilon}{2}\frac{dG}{dA}$$

から小さい方の根 A_1 を求め、それにより

$$(2.28)\qquad \varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{dG}{dA}\right)_{A=A_1}$$ を定める。

一方、このように出来る極限の Mach 数 M_c の値は上の（2.24）、（2.25）で与えられるが、$\varepsilon'=0$ としたとき、それは γ の値に対して以下のようになる。

γ	M_c
2	0.1632
1.667	0.1619
1.4	0.1609

M^2 展開解の近似度

（1.6）式 であらわされている q の M^2 展開解で第N項までとつたものを $q^{(N)}$ とし、これを

$$q^{(N)}=q_0+Q^{(N)},$$

$$Q^{(N)} = Q_0 + M^2 Q_1 + \cdots + M^{2N} Q_N$$

$$但し \quad Q_0 = 0$$

とあらわす。この第N近似解 $Q^{(N)}$ による残差の大きさは $\|\mathfrak{L} T Q^{(N)}\|$ であらわせる。

次に、解の精度 ε を非圧縮解 g_0 の大さ $\|g_0\|(=2)$ を基準にとってあらわし

(2.29) $\qquad \varepsilon = \|g_0\| \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$

とする。ここで ε_0 は無次元の数で 0.1, 0.05, 0.01（それぞれ 10%, 5%, 1% の精度）のごとく与えられる。

さて、γ, ε_0, M $(< M_c)$ が与えられたとき、(2.28) (2.29) から $\varepsilon' = \varepsilon_0 \left(\frac{dG}{dA}\right)_{A=A_1}$ が定まり、この ε' に対して $\|\mathfrak{L} T Q^{(N)}\| \leq \varepsilon'$

を満足する N まで近似を進めれば、与えられた M に対して、必要な精度 ε_0 を満足する近似解がえられる。

あるいは、逆に、いま第N近似解 $Q^{(N)}$ が得られているとき、(2.28) から、この解が与えられた精度 ε_0 以内にあるような M の値を定めることが出来る。この場合、勿論 $M < M_c$ でなければならない。

たとえば第0近似 $Q^{(0)} = 0$ では (1.6) から

$$\|\mathfrak{L} T Q^{(0)}\| = \|\mathfrak{L} Q^{(1)}\| = k M^2, \quad k \fallingdotseq 1.46$$

となる。このとき

$$(2.30)\quad \varepsilon' = kM^2$$

とし (2.27), (2.28) から

$$(2.31)\quad A_1 = 2 + \left(\frac{1}{9} + k\right)M^2 + O(M^4)$$

となるが、ここで簡単のため $\gamma = 2$ とすると (2.20), (2.9) から

$$G(A; 2, M^2) = A\left\{1 - \frac{3}{2}M^2(A^2 - 1)\right\}$$

となり, (2.28), (2.29), (2.30) から

$$(2.32)\quad kM^2 = \varepsilon_0\left\{1 - \frac{3}{2}M^2(3A_1^2 - 1)\right\}$$

となる。

(2.32), (2.31) から ε_0 に対する M の値が計算され、それは以下のようになる。

ε_0	0.1	0.05	0.01
M	0.18	0.15	0.08

従って、$\gamma = 2$ のとき、たとえば 5%, 1% の精度なら、M の値が各々 0.15, 0.08 以下のとき非圧縮解でよいことになる。

§3. 文献

[1]. 今井 功 : 高速気流の解法、数学概論(応用編) 岩波書店 (1960) p. 639~

[2] A. Sakurai: Appropriate Solution and its Application to Problems in Fluid Dynamics, Fluid Dynamics Transactions Vol.4, Warsaw (1968) p.127～

[3] 肥田金三: 細長い回轉楕円体を過ぎる圧縮流について，浪速大学研究速報2号(1950)