数理解析研究所講究録
第214巻 1974年 17-25

2重周期円柱列を過ぎるストークス流れ

東大 理　橋本英典

§1 はしがき

2次元および3次元の周期格子点に周期的に配置された物体を過ぎるストークス流れに対応する周期超関数方程式のフーリエ級数による構成とその球群，円柱群および3次元の任意物体群を構成する物体に働く力に対する応用などについては文献1),2)に述べたが，ここでは複素関数論の応用として2次元格子に対する周期複素超関数方程式の基本解を楕円関数を用いて構成し，従前の結果との比較をこころみる。また円柱列の場合について，軸に垂直な流れと並行な流れとの関係をしらべる。また格子間隔に比し，半径が小さいときについて，力の方向と平均流の方向が一般には平行でないことを示す。また全体を多孔媒質と見たときの平均流と圧力勾配の関係づけるダルシーの法則が一般には非等方的でテンソル形をとることを示し，その係数を求める。

§2 基本解

複素面 $z=x+iy$ の周期点 X_{mn} : $z=\Omega_{mn}=2m\omega_1+2n\omega_2$ $(n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ に物体を周期的に配置するとき、これを過ぎるストークス流れの基本解は各物体に働く力を $K=F_x+iF_y$ 流速を $w=u-iv$, 圧力を p とするとき X_{mn} を support とする δ関数の和を右辺に持つ複素方程式（ ̄ は複素共役を表わす）

$$\mu\Delta\bar{w} \equiv \frac{\mu}{4}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\bar{w} = K\sum_{m,n}\delta(X-X_{mn})+2\frac{\partial p}{\partial\bar{z}} \tag{2.1}$$

を満足する。 一方 渦度

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2}$$

は連續の式

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.3}$$

を考慮すれば $\bar{w}$ から z 微分

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=\frac{i}{2}\omega \tag{2.4}$$

によって導かれる。(2.4) を (2.1) に代入して $\bar{w}$ を消去し、X_{mn} を support とするデルタ関数の複素表示

$$\delta(X-X_{mn})=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{z-z_{mn}}\right) \tag{2.5}$$

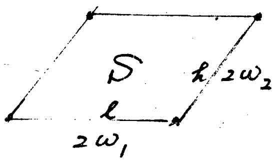
を用いれば

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(p-i\mu\omega) = -\frac{K}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\sum_{m,n}\frac{1}{z-z_{mn}} \qquad (2.6)$$

を得る。これを積分すれば

$$p-i\mu\omega = g_F'(z) = -\frac{K}{2\pi}\zeta(z) - Pz \qquad (2.7)$$

を得る。ただし $\zeta(z)$ は z_{mn} に1位の極を持つ Weierstrass の ζ 関数であって、擬周期性



$$\zeta(z+2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j \qquad (2.8)$$

を持つので、ωが周期的、pの分配が周期的になるということを考慮して Pz の項を加えてある。変位 $z \to z+2\omega_j$ に対する変化を δ_j であらわせば、ωの周期性と(2.8)を考慮することにより

$$0 = I_m[\delta_j g'] = I_m[2P\omega_j + 2A\eta_j] = 0 \qquad (2.9)$$

ただし

$$A = K/(2\pi) \qquad (2.10)$$

を得る。等式

$$\frac{\pi}{2i} = \{\omega,\eta\} \equiv \omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = -\{\bar{\omega},\bar{\eta}\} \qquad (2.11)$$

$$\frac{S}{2i} = \{\omega,\bar{\omega}\} = -\{\bar{\omega},\omega\} \qquad (2.12)$$

を用いて(2.9)を解けばPとして

$$P = \frac{1}{S}(\beta A + \pi \bar{A}) \qquad (2.13)$$

たゞし
$$\beta = 2i\{\bar{\omega}, \eta\} \qquad (2.14)$$

ととればよいことがわかる。たゞしSは周期平行四辺形の面積である。

§3. 一般解 I (pとω)

一般解は基本解の任意個の微分を重畳することによって求められ、℘関数

$$\wp(z) = -\zeta'(z)$$

とそのn回微分を用いれば(2.7)から

$$p - i\mu\omega = g'(z) = -PZ - A\zeta(z) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \wp^{(n)}(z) \qquad (3.1)$$

の形にあらわされることがわかる。たゞしA_nは任意定数である。(3.1)から

$$-\delta_j p = \frac{\pi}{S} Re[A\bar{\omega}_j] \qquad (3.2)$$

を得、これを平均圧力勾配 $-\dot{P}_x$, $-\dot{P}_y$ の作る圧力差

$$-\delta_j[\dot{P}_x x + \dot{P}_y y] = -2Re[\bar{\omega}_j(\dot{P}_x + i\dot{P}_y)] \qquad (3.3)$$

と比較して

$$\dot{\pi} = \dot{P}_x + i\dot{P}_y = -\frac{2\pi}{S}A = -\frac{1}{S}(F_x + iF_y) \qquad (3.4)$$

すなわち "平均応力勾配ベクトルと物体に働く力は平行であり、力の大きさは応力勾配を S 倍したものに等しい" という一般的な性質を得る。

(3.1) を物体に働く力の公式[5)]

$$K = F_x + iF_y = i\oint_C g'(z)\,dz \qquad (3.5)$$

(ただし積分路は物体を反時計まわりにまわる任意の閉曲線)

に代入すれば当然のことながら (3.1) によって $2\pi A$ を与える。

また、任意の周期平行四辺形の周囲を C にとれば、w の周期性によって応力だけの積分となるが、これに (3.2) を代入しても同一の結果が得られる。

§4. 一般解 II. ($w = u - iv$) と軸方向の流れ $w_{\parallel}$

(3.1) を (2.4) に代入して w を求めれば z の任意関数 $f'(z)$ を加え

$$\begin{aligned}4\mu w &= \bar{z}g' - \bar{g} + f'(z) \quad \left(= \int (g' - \bar{g}')\,d\bar{z}\right)\\ &= -Pz\bar{z} - A\bar{z}\zeta(z) - \bar{z}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \wp^{(n)}(z)\\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{P}\bar{z}^2 + \bar{A}\log\bar{\sigma}(\bar{z}) + \sum_{n=0}^{\infty}\bar{A}_n\wp^{(n-1)}(\bar{z}) + f'(z)\end{aligned} \qquad (4.1)$$

を得る。ただし $\sigma(z)$ は σ 関数 $(\log\sigma)' = \zeta$ で擬周期性

$$\log\sigma(z + 2\omega_i) = \pi i + 2\eta_i(z + \omega_i) + \sigma(z) \qquad (4.2)$$

を持つ。w の周期性を満たすためには f' として z^2, $\log\sigma$, $z\zeta$ の項を楕円関数以外に加える必要があり、結局

$$4\mu w = \bar{A} L + \frac{SA}{2\pi} L_z^2 + \frac{S}{\pi} L_z \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi^{(n)}(z)$$
$$- \bar{A}_0 G + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \bar{\varphi}^{(n-1)}(\bar{z}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi^{(n)}(z) + C \tag{4.3}$$

ただし

$$L \equiv L(z, \bar{z}) = \ln \sigma\bar{\sigma} + \frac{1}{2S}(\beta z^2 - 2\pi z\bar{z} + \bar{\beta}\bar{z}^2) \tag{4.4}$$

$$L_z \equiv \partial L/\partial z = \zeta + \frac{1}{S}(\beta z - \pi \bar{z}) \tag{4.5}$$

$$G \equiv \bar{\zeta} + \frac{1}{\pi}(\bar{\beta}\zeta - \gamma z) \tag{4.6}$$

$$\gamma := 2i\{\bar{\zeta}, \zeta\} \tag{4.7}$$

を得る。ここに関数 $L(z,\bar{z})$ は

$$\Delta L = -\frac{4\pi}{S}$$

を満足し、圧力勾配が軸方向に加わったときの流れ $w_{/\!/}$ を支配する方程式

$$\mu \Delta w_{/\!/} = -\dot{P}_{/\!/} \tag{4.8}$$

の解が一般に

$$4\mu w_{/\!/} = \frac{S\dot{P}}{\pi}\left[L(z,\bar{z}) + C_{/\!/} + \left\{ \sum_{0}^{\infty} b_n \varphi^{(n)}(z) + \text{複素共役} \right\} \right] \tag{4.9}$$

でよえられることを示す。このとき柱の断面積を S_b とすれば柱の軸方向に働く単位長当りの力 $F_{/\!/}$ は、圧力勾配とのバランスから

$$F_{/\!/} = (S - S_b)\dot{P} \tag{4.10}$$

でよえられる。

§5 円柱格子

特に半径 ε が格子間隔にくらべて小さい $(\varepsilon \ll |\omega_i|)$ 円柱格子について、柱面で $w=0$ とすれば (4.1) から $C=O(1)$, $A=O(1)$, $A_1=O(\varepsilon^4)$ $A_3=O(\varepsilon^6)\cdots$, $B_0=O(1)$, $B_2=O(A_1)=O(\varepsilon^4)$, $A_{2n}=0$, $B_{2n+1}=0$ $B_{2m}=O(A_{2m-1})$ となることがわかり、各項の比較から

$$C=-\frac{\beta S E}{\pi}A-[\ln\varepsilon^2-\phi]\bar{A}+O(\varepsilon^4) \qquad (5.1)$$

$$B_0=-\frac{SA}{2\pi}E^2+O(\varepsilon^4) \qquad (5.2)$$

ただし

$$E=1-\phi, \qquad \phi=\pi\varepsilon^2/S \qquad (5.3)$$

となることがわかる。これを用いて (4.1) を積分すれば、平均流 $W=U-iV$ が

$$W=U-iV=\frac{2}{S}\{\bar{\omega}\,\delta\psi\}=\frac{2}{S}(\bar{\omega}_1\delta_2\psi-\bar{\omega}_2\delta_1\psi) \qquad (5.4)$$

によって求まる。ただし $\delta_j\psi$ は点 z と $z+2\omega_j$ を結ぶ曲線を左から右に通過する流量である。かなり面倒な計算の後 $O(\varepsilon^4)$ の程度で、拡張されたダルシーの法則

$$8\pi\mu W=\lambda_1K+\lambda_0\bar{K}=-S(\lambda_1\pi+\lambda_0\bar{\pi}) \qquad (5.5),(5.6)$$

を得る。ただし π は複素圧力勾配の平均値 ((3.4) を見よ) で

$$\lambda_1=-\frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2}+\frac{\pi S}{\omega_2^2}\left(\hat{Q}-\frac{1}{24}\right)+\frac{3\eta_2 S}{2\pi\omega_2}+\frac{2\beta}{\pi}\phi \qquad (5.7)$$

$$\lambda_0=2\ln\frac{h}{\varepsilon}-2\ln(2\pi|\hat{Q}_0|^2)+\frac{\pi S}{3h^2}+2\phi=\text{実数} \qquad (5.8)$$

$$\hat{Q}_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\hat{q}^{2n}),\quad \hat{Q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{q}^{2n}}{1-\hat{q}^{2n}},\quad \hat{q}=e^{-\pi i(\omega_1/\omega_2)} \qquad (5.9)$$

$$\eta_2 = \frac{\pi^2}{\omega_2}\left(\frac{1}{12} - 2\hat{H}\right), \quad \hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\hat{q}^{2n}}{1-\hat{q}^{2n}} \tag{5.10}$$

$$\beta = \pi\frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2}\left[1 - \frac{\pi S}{|\omega_2|^2}\left(\frac{1}{12} - 2\hat{H}\right)\right], \quad l = |2\omega_1|, \; h = |2\omega_2| \tag{5.11}$$

である。座標回転

$$W' = We^{i\theta}, \quad K' = Ke^{-i\theta} \tag{5.12}$$

によって主軸を求めれば

$$\theta = -\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{Im[\lambda_1]}{Re[\lambda_1]}\right] \tag{5.13}$$

であらわされる２つの直交する方向では 力 F と速度 U が平行で

$$8\pi\mu U = (\lambda_0 \pm |\lambda_1|)F, \quad V = 0 \tag{5.14}$$

となることがわかる。

i) 円柱列 $t = h/l \ll 1$, $2\alpha = 90°$ とすれば

$$4\pi\mu U = \log\frac{h}{\varepsilon} - \log(2\pi) + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2\varepsilon^2}{3h^2} \tag{5.15}$$

で玉田藤川[3], 宮城[4]の結果と一致する。

ii) ひし形配置

$h = l$, $2\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, 主軸は対角線方向

$Q_0 = \bar{Q}_0 = \hat{Q}$, $Q = \bar{Q} = \hat{Q}$

$$\lambda_0 = 2\ln\left[\frac{l}{2\pi|Q_0|^2\varepsilon}\right] + \frac{\pi}{3}\sin 2\alpha + 2\phi$$

$$\lambda_1 = -4\pi\, Im[Q] - \frac{3}{2\pi}\beta + \frac{2\beta}{\pi}\phi$$

$$\beta = -8\pi^2 [H] \tag{5.16}$$

iii) 正方形配置. $h = l$, $\alpha = \pi/4$ Isotropic. $\lambda_2 = 0$

$$4\pi\mu W = \left\{\ln\frac{h}{\varepsilon} - \left[\log(2\pi Q_0^2) - \frac{\pi}{6}\right] + \phi\right\}\bar{K} \tag{5.17}$$

これはi)のものより簡単であり, 数値は一致する。 $\log(2\pi Q_0^2) = 1.3105$

iv) 6方格子配置. $h = l$, $\alpha = \pi/6$, Isotropic $\lambda_2 = 0$

$$4\pi\mu W = \left\{\ln\frac{h}{\varepsilon} - \left[\log(2\pi Q_0^2) - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi\right] + \phi\right\}\bar{K} \tag{5.18}$$

$\log(2\pi Q_0^2) = 1.3931$

§6 柱に平行な流れ

(4.9), (4.10) を用いて柱に平行な流れについて行なった計算によれば, 正方形, 6方格子配置について $O(\phi)$ の程度で

$$F_\perp = 4\pi\lambda^{-1}\mu U_\perp \quad , \quad F_{/\!/} = 2\pi\lambda^{-1}\mu U_{/\!/} \tag{6.1}$$

ただし
$$U_{/\!/} = \frac{Q}{S}(1-\phi) \tag{6.2}$$

(Qは周期平行4辺形内の全流量)

$$U_\perp = \frac{\lambda S \dot{P}}{4\pi\mu} \quad , \quad Q = \frac{\lambda S^2 \dot{P}}{2\pi\mu} \tag{6.3}$$

となることがわかる.

References.

1) H. Hasimoto : J. Fluid Mech. 5 (1959) 317.

2) H. Hasimoto : Theor. & Appl. Mech. 22 (1974) 287.

3) K. Tamada & H. Fujikawa : Quart. J. Mech. Appl. Math. 10 (1957) 423.

4) T. Miyagi : J. phys. Soc. Japan 13 (1958) 209.

5) 今井 功 : 流体力学 前編 (1973, 裳華房) 338.