数理解析研究所講究録
第 214 巻 1974 年 42-56

振動柱による二次流

阪府大　工　　宮城敏夫

§1.　一般論

無限に拡がった静止している非圧縮，粘性流体の中で，調和振動をしている二次元物体を考える。振動は x 軸に平行で

$$x = a \sin \omega t$$

と書ける。振幅 a は極めて小さく，振動数 ω は極めて大きいものとする。速度は　$\dot{x} = a\omega \cos \omega t$　である。

Navier-Stokes の方程式から圧力項を消去し，流れの函数 ψ を導入し，物体の代表長さ L，時間 ω^{-1}，速度 $a\omega$ を用いて無次元化すれば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \epsilon\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{M^2}\Delta^2\psi \tag{1}$$

となる．但し　$\epsilon \equiv a/L \ll 1$，$(\sqrt{\nu/\omega}/L)^2 = 1/M^2 \ll 1$　である。後に分る様に，$1/M$ は境界層の厚さに関係している。

座標系を物体に固定すれば，境界条件は

$$\psi = \partial\psi/\partial y = 0 \quad ; \quad \text{物体表面} \qquad (2)$$

$$\psi \sim y e^{it} \quad ; \quad 無限遠 \qquad (2)$$

と書ける。但し，複素表示は実部を考えている。尚この様な加速度を有する問題でも，流体が非圧縮で，運動が並進であれば，方程式は不変であることが分っている。[1]

$\epsilon \ll 1$ の場合を考えるので，ψ を

$$\psi = \psi_0 + \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + \cdots \qquad (3)$$

の様に展開すれば，(1) は

$$O(\epsilon^0) : \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_0 = \frac{1}{M^2}\Delta^2\psi_0 \qquad (4)$$

$$O(\epsilon) : \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_1 - \frac{1}{M^2}\Delta^2\psi_1 = \frac{\partial(\psi_0, \Delta\psi_0)}{\partial(x, y)} \qquad (5)$$

となる。第一近似の方程式は線型で，解には $\cos\omega t$ に比例する形が予想される。第二近似ではその非線型性から $\cos^2\omega t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)$ となり，時間項の他に，定常項が生ずる。これがこゝでの主題の Steady Streaming である。

(4) はこのままでは解けないので，$M \gg 1$ として展開する.

$$\psi_0 = \psi_{00} + \frac{1}{M}\psi_{01} + \cdots$$

として，(4) に代入すると

$$O(\epsilon^0),\ O(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{00} = 0 \qquad (6)$$

$$O(\epsilon^0),\ O\left(\frac{1}{M}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{01} = 0 \qquad (7)$$

（6）は明らかに potential 流なる故，物体表面の境界条件を充し得ないので，物体表面に生ずる振動境界層（厚さ $1/M$）で調節する。したがって，ψ_{00} としては粘着条件をゆるめて

$$\psi_{00} = \Psi(x)\,e^{it}.$$

ただし，$\Psi(x)$ は柱をすぎる potential 流の流れ函数で，無限遠の一様流は 1 である。

物体表面に極めて近い所では，物体に沿って s，これに垂直に n を取る。すると ψ_{00} は

$$\psi_{00} \sim n\,V(s)\,e^{it}, \qquad n \to 0$$

と書ける。ただし，$V(s)$ は potential 流の物体表面の速度分布である。境界層内では，その解を χ で書くことにして

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\chi_{00} = \frac{1}{M^2}\Delta^2\chi_{00}$$

は

$$\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial n^2}\chi_{00} = \frac{1}{M^2}\frac{\partial^4}{\partial n^4}\chi_{00}$$

となるので，

$$\eta = \frac{M}{\sqrt{2}}\,n \tag{8}$$

の様に，例の如く n の方向に拡大すれば

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi_{00} = 0 \\ &\text{境界条件}\qquad \eta = 0:\quad \chi_{00} = \partial\chi_{00}/\partial\eta = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad \eta = \infty:\quad \chi_{00} = n\,V(s)\,e^{it} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

であり，(9) の解は次の様に与えられる。

$$\chi_{00}=\frac{\sqrt{2}}{M}V(s)\left\{\eta-\frac{1-i}{2}\left(1-e^{-(1+i)\eta}\right)\right\}e^{it} \qquad (10)$$

第一項は当然 ψ_{00} に対応しているが，第二項は $1/M$ を含み，これは ψ_{01} に対応するが，外部では $\Delta\psi_{0i}=0$ が成立し明らかに振動境界層による非粘性補正である。ただし，これは振動項であるので，ここではこれ以上問題にしない。

次に（5）式に進み，先ず境界層の方から解く。ie.

$$\frac{\partial^3\chi_{10}}{\partial t\partial n^2}-\frac{1}{M^2}\frac{\partial^4\chi_{10}}{\partial n^4}=\frac{\partial(\chi_{00},\ \partial^2\chi_{00}/\partial n^2)}{\partial(s,\ n)} \qquad (11)$$

前と同様に（8）の η を用い，

$\eta=0$ ：粘着．　　$\eta=\infty$ ：速度有限

という条件の下で（11）を解けば，次の様になる．

$$\left.\begin{aligned}
&\chi_{10}=Te^{2it}+S\\
&T=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{M}\frac{dV^2}{ds}\left\{-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}+\frac{i\eta}{2}e^{-(1+i)\eta}+\frac{1+i}{4\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}(1+i)\eta}\right\}\\
&S=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{M}\frac{dV^2}{ds}\left\{-\frac{3}{4}\eta+\frac{13}{8}-e^{-\eta}\left(\frac{1}{2}\eta\sin\eta+\sin\eta+\frac{3}{2}\cos\eta\right)-\frac{1}{8}e^{-2\eta}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$\eta\to\infty$ の時

$$\chi_{10}\to-\frac{3}{8}\frac{dV^2}{ds}\cdot n+O\left(\frac{1}{M}\right) \qquad (13)$$

となり境界層の外側に steady streaming が現われる。

以上の導出は Riley[2)]，によるものであるが，(13) 式の結果は Schlichting[3)]，Stuart[4)]，Batchelor[5)] も与えている。

さらに，Riley[2] の線に沿って話を進める。境界層の外縁に誘起された速度（定常）を支配する方程式の問題である。というのは振動項 T は $\eta \to \infty$ の時 $1/M$ の程度であるので、今考えている order では零であるとしてよい。故に (5) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_{10} - \frac{1}{M^2}\Delta\psi_{10} = \frac{\partial(\psi_{00}, \Delta\psi_{00})}{\partial(x, y)}$$

となるが，$(1/M)^0$ の order では $\Delta\psi_{00} = 0$ のために

$$\Delta\psi_{10}^{(u)} = 0$$

ie, ψ_{10} の unsteady part $\psi_{10}^{(u)} = 0$ なる解しかない。さて，(1) に戻って ψ をすべて ϵ 展開し，$\Delta\psi_0 = 0$ を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(\psi_1 + \epsilon\psi_2 + \cdots) - \epsilon\frac{\partial(\psi_0 + \epsilon\psi_1 + \cdots, \Delta\psi_1 + \epsilon\Delta\psi_2 + \cdots)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{M^2}\Delta^2(\psi_1 + \epsilon\psi_2 + \cdots)$$

ここで　$\psi_1 \fallingdotseq \psi_{10} = \psi_{10}^{(s)}$

となるのでこれを上式に代入して書き直せば

$$\Delta^2\psi_{10}^{(s)} = -\epsilon M^2\left[\frac{\partial(\psi_0, \Delta\psi_{10}^{(s)})}{\partial(x, y)} + \epsilon\frac{\partial(\psi_0, \Delta\psi_2)}{\partial(x, y)} + \epsilon\frac{\partial(\psi_{10}^{(s)}, \Delta\psi_{10}^{(s)})}{\partial(x, y)} + O(\epsilon^2)\right]$$

となるが，実は ψ_0 は振動項なる故 [ ] 内第一項は非定常であり，第二項は $\Delta\psi_2 = \phi_{2s}(x) + \phi_{2t}(x)\cos t$ であることが Riley[2] により示されているので $\psi_0 \sim \cos t$ を考えれば，やはり非定常になるので上式は $\psi_{10}^{(s)}$ を決定する式となる。

ここで若し，　$\epsilon^2 M^2 \ll 1$　(14)

が成立すれば $\psi_{10}^{(s)}$ を支配する方程式は Stokes となる。この $\epsilon^2 M^2$ という形は

$$\epsilon^2 M^2 = \epsilon \frac{U_\infty L}{\nu} = \epsilon R = R_s \qquad (15)$$

と書ける，ここで R は上の様に，普通の Reynolds 数である。したがって，Steady Streaming を支配する方程式は，R_s さえ小さければ Stokes であるという重要な結果が得られた。この問題は長さの次元を有するものが3つあるので話が複雑になるが，これを明らかにすると

$$\text{振幅 } a \sim \text{粘性長さ } \sqrt{\nu/\omega} \sim \text{物体長さ } L$$

$$a/L \sim \sqrt{\nu/\omega}/L \sim 1$$

$$\epsilon \sim 1/M \sim 1$$

なる故 $\quad \epsilon \ll 1/M \ll 1$

の条件が充たされた時，外部は Stokes Field になるということである。

$\Delta^2 \psi_{10}^{(s)} = 0$ の境界条件は，境界層外縁に現われた定常流

ie $$\frac{\partial \psi_{10}^{(s)}}{\partial n} = -\frac{3}{8}\frac{dV^2}{ds}, \quad \frac{\partial \psi_{10}^{(s)}}{\partial s} = 0 \quad : \quad n = 0 \qquad (16)$$

である。この問題については，物体が円柱の場合 Schlichting[6] が計算し，流線図を与えた。R_s が $O(1)$ や $R_s \gg 1$ の場合については，多くの人の研究があるが，これについては，やはり Riley[2] を参照すればよく，ここでは述べない。

§2. 対称Joukowski翼

ここでは，物体として上下対称，前後非対称な所謂対称Joukowski翼の断面を有する柱の場合を論ずる。

先に，Stokes方程式の解を求めておく。今 $\epsilon v_1 = \epsilon(u_1, v_1)$ なる定常速度について，流れ函数 $\epsilon\psi_1$ を導入すれば

$$u_1 - iv_1 = 2i\,\partial\psi_1/\partial z$$

と書ける。さらに，$\Delta^2 = 4\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$

を用いて，Stokes方程式は

$$\partial^3(u_1 - iv_1)/\partial z\partial\bar{z}^2 = 0$$

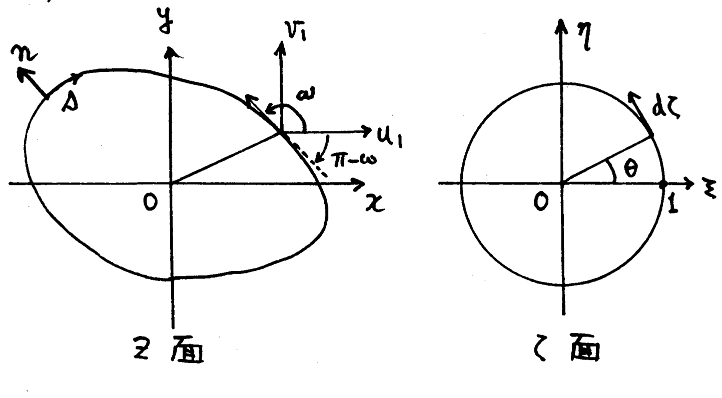
となり；これを積分すれば，Stokes方程式の解は一般に

$$u_1 - iv_1 = \bar{z}\frac{df}{dz} - \bar{f}(\bar{z}) + g(z) \qquad (17)$$

と書ける。ただし，$f(z)$，$g(z)$ は流場で正則な函数である。

ここで，z面の任意の柱の外部をζ面の単位円の外部に写像する函数を $\qquad z = z(\zeta)$

とする。



左図を参照して s，n 方向の速度成分 g_s，g_n は次式の計算の様になる。

$$q_s - i q_n = \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = (u_1 - i v_1) e^{-i(\pi-\omega)} = -(u_1 - i v_1) e^{i\omega}$$

$$= -\frac{3}{8}\frac{dV^2}{ds} = -\frac{3}{8}\frac{dV^2}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\frac{dz}{ds} = \frac{3}{8}\frac{dV^2}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} e^{i\omega}$$

故に

$$u_1 - i v_1 = -\frac{3}{8}\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^{-1}\frac{dV^2}{d\zeta} \qquad ただし，\zeta\bar{\zeta} = 1 \tag{18}$$

これを Stokes 解（17）に代入すると

$$\bar{z}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^{-1}\frac{df}{d\zeta} - \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + g(\zeta) = -\frac{3}{8}\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^{-1}\frac{dV^2}{d\zeta} \tag{19}$$

となる。この式は解析接続によって任意の ζ について成立すべき式である。

さて，物体の形（写像函数）は

$$z = \frac{1+\lambda}{4}\left\{\zeta - \lambda + \frac{(1-\lambda)^2}{\zeta - \lambda}\right\}, \qquad 0 < \lambda < 1 \tag{20}$$

を採用する．これは chord length $= 4/(1+\lambda)$ となるので，無限遠の一様流の大きさを 1 として，複素ポテンシャル F は

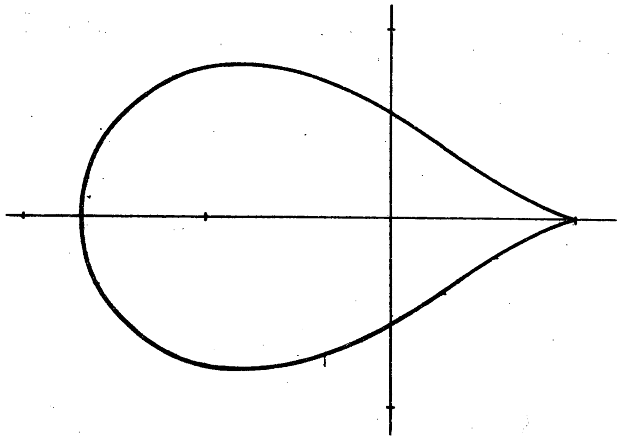
$$F = \frac{1+\lambda}{4}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \tag{21}$$

であるから，

$$V^2 = \left(\frac{dF}{dz}\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\right)_{\bar{\zeta}=1/\zeta} = \left(\frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{\zeta}}\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\right)_{\bar{\zeta}=\frac{1}{\zeta}}$$

の計算をすると，$\lambda = 1/2$ が非常に簡単になることが分る．

この様にしても，計算が簡単になるだけで，一般性を失うことはない。この場の翼型は下図に示す様な形である。また，



物体表面の速度分布は

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}+i\frac{\partial\psi_1}{\partial s}=\frac{3}{8}\frac{dV^2}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}\cdot e^{i\omega}$$

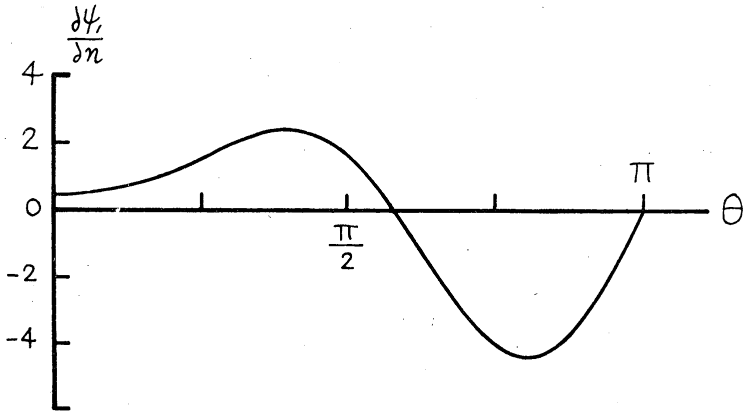
さらに

$$e^{i\omega}=i\zeta\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}\Big/\frac{d\bar z}{d\bar\zeta}}$$

であることから，$\zeta=e^{i\theta}$とおいて，

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}=6\left(\frac{5}{4}-\cos\theta\right)^2\left(\frac{1}{4}+\cos\theta\right)\cos\frac{\theta}{2},\qquad\frac{\partial\psi_1}{\partial s}=0\qquad(22)$$

が得られる。これが境界層外縁に現われる問題の定常流であって，図示すれば，左の様な分布になっている。



$\lambda=1/2$の時，u_1-iv_1を計算し，(19)に代入すると，次の様になる。

$$\bar z\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^{-1}\frac{df}{d\zeta}-\bar f\left(\frac{1}{\zeta}\right)+g(\zeta)=$$

外　外　内　外

$$= \underset{内}{-\frac{3}{4}\zeta^2} + \underset{内}{\frac{3}{2}\zeta} + \underset{外}{\frac{3}{16}\zeta^{-1}} + \underset{外}{\frac{3}{64}\zeta^{-2}} - \underset{外}{\frac{81}{64}\zeta^{-3}} + \underset{外}{\frac{15}{16}\zeta^{-4}} - \underset{外}{\frac{3}{16}\zeta^{-5}} \tag{23}$$

上式の各因子の下に内，外と書いたのは，単位円の内部，外部で正則な函数という意味である。左辺の第一項は具体的に計算をすれば

$$\left(\frac{1}{\zeta} - 1 - \frac{1}{\zeta-2}\right)\frac{(\zeta-\frac{1}{2})^2}{\zeta(\zeta-1)}\frac{df}{d\zeta}$$

となり，( ) 内の $1/(\zeta-2)$ は単純poleであるから，次の操作によって，外部で正則と内部で正則な函数に分離することができる．すなわち

$$\underset{外}{\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)\frac{(\zeta-\frac{1}{2})^2}{\zeta(\zeta-1)}\frac{df}{d\zeta}} \underbrace{- \frac{(\zeta-\frac{1}{2})^2}{\zeta(\zeta-1)}\frac{df}{d\zeta}\frac{1}{\zeta-2} + \frac{(\zeta-\frac{1}{2})^2}{\zeta(\zeta-1)}\frac{df}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=2}\frac{1}{\zeta-2}}_{両者で\ 外}$$

$$\underset{内}{- \frac{(\zeta-\frac{1}{2})^2}{\zeta(\zeta-1)}\frac{df}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=2}\frac{1}{\zeta-2}}$$

この様にして，(23)の各項を内部で正則な函数を左辺に，外部で正則な函数を右辺へ移せば．

$$\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{9}{8}\frac{f'(2)}{\zeta-2} - \frac{3}{4}\zeta^2 + \frac{3}{2}\zeta$$

$$= g(\zeta) - \frac{(\zeta-\frac{1}{2})^2}{\zeta^2}\left\{1 + \frac{\zeta}{(\zeta-1)(\zeta-2)}\right\}f'(\zeta) + \frac{9}{8}\frac{f'(2)}{\zeta-2} - \frac{3}{16}\zeta^{-1} - \frac{3}{64}\zeta^{-2} + \frac{81}{64}\zeta^{-3} - \frac{15}{16}\zeta^{-4} + \frac{3}{16}\zeta^{-5}. \tag{24}$$

今，$f(\zeta)$ は $\zeta=1$ でも正則であると仮定すると，左辺と右辺との正則な領域に共通部分が生じ，両者が等しいためには，全領域で正則，すなわち常数でなければならない。この常数は

一般性を失うことなく零にできるのでこれより左辺が零, ie

$$\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{9}{8}\frac{f'(2)}{\zeta-2}-\frac{3}{4}\zeta^2+\frac{3}{2}\zeta=0$$

ここで，ζ を $1/\zeta$ とおきかえ，$\zeta=2$ を代入すれば，$f'(2)=\frac{1}{4}$ となり，結局 $f(\zeta)$ が次の様に決まる。

$$f(\zeta)=\bar{f}(\zeta)=\frac{3}{64}\left(2+\frac{1}{\zeta-\frac{1}{2}}+\frac{16}{\zeta^2}-\frac{32}{\zeta}\right). \tag{25}$$

これは確かに $\zeta=1$ で正則である。$f(\zeta)$ が決まれば，(24) の右辺が零という式から $g(\zeta)$ が

$$g(\zeta)=\frac{3}{64}\left(\frac{1}{\zeta-1}-\frac{1}{\zeta}+\frac{23}{\zeta^2}-\frac{77}{\zeta^3}+\frac{56}{\zeta^4}-\frac{12}{\zeta^5}\right) \tag{26}$$

と決められる。これらを (17) に代入して，流場の任意の点に於ける複素速度が得られる。

$$\begin{aligned}u_1-iv_1=\frac{3}{64}\Big\{&\left(\bar{\zeta}-\frac{1}{2}+\frac{1/4}{\bar{\zeta}-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{\zeta-1}+\frac{1}{\zeta}+\frac{32}{\zeta^2}-\frac{32}{\zeta^3}+\frac{8}{\zeta^4}\right)\\&-2-\frac{1}{\bar{\zeta}-\frac{1}{2}}+\frac{32}{\bar{\zeta}}-\frac{16}{\bar{\zeta}^2}+\frac{1}{\zeta-1}-\frac{1}{\zeta}+\frac{23}{\zeta^2}-\frac{77}{\zeta^3}+\frac{56}{\zeta^4}-\frac{12}{\zeta^5}\Big\}.\end{aligned} \tag{27}$$

これは，$\quad (u_1-iv_1)_{|\zeta|\to\infty}=-\dfrac{3}{32}$ (28)

という興味ある結果を導く。x の負の方向の流れが残り，その大きさは

$$\frac{3}{32}\epsilon U_\infty=\frac{3}{32}\frac{U_\infty^2}{\omega L}$$

である。

流線図を画くために，(17) を書きかえて

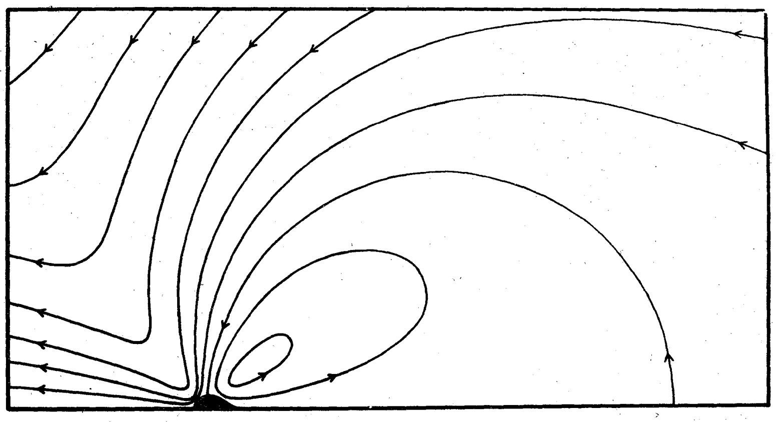
$$\bar{z}(\bar{\zeta})\frac{d\zeta}{dz}\frac{df}{d\zeta}-\bar{f}(\bar{\zeta})+g(\zeta)=2i\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dz}.$$

これより，ψ_1 を求めると次の公式を得る．

$$\psi_1=\mathcal{J}\left[\bar{z}(\bar{\zeta})f(\zeta)+\int^{\zeta}g(\zeta)\,z'(\zeta)\,d\zeta\right] \tag{29}$$

これを具体的に，今の場合について計算すると次の様になる。

$$\psi_1=\frac{9}{128}\mathcal{J}\left[\frac{1}{4}\left(\bar{\zeta}-\frac{1}{2}+\frac{1/4}{\bar{\zeta}-\frac{1}{2}}\right)\left(2+\frac{1}{\zeta-\frac{1}{2}}-\frac{32}{\zeta}+\frac{16}{\zeta^2}\right)-\frac{1}{\zeta-\frac{1}{2}}-\frac{5}{\zeta}+\frac{10}{\zeta^2}-\frac{4}{\zeta^3}\right]. \tag{30}$$



(30) を用いて，物理面で流線図を画けば，左の様になる。非常に大きい吸い込みがあり，また反対側には閉じた領域が生ずる。

以上は，京大工，航空 玉田珖 と共著であり，47年10月広島に於ける物理学会で発表し，現在投稿準備中である。

§ 3. 他の例.

§ 2 は Joukowski 翼 であるから，Trailing Edge は Cusp に

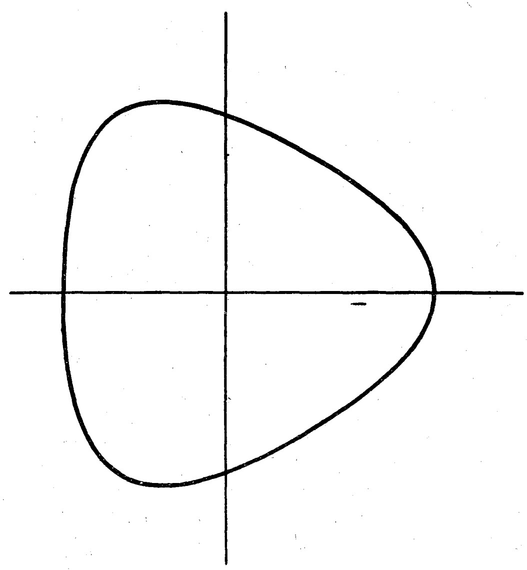
なる。このために，無限遠で $-x$ の方向に流れが残るのではないかという問題，或は，物体の形でどちら向きの流れになるかというもっと一般的な問題がある。以上に述べた方法によると，写像函数さへ与えれば，その後の計算は殆んど同一であるので，結果だけを簡単に記す。

(a) Hypotrochoid

写像函数は

$$z=\zeta+\frac{\varepsilon}{\zeta^2}, \quad 0\le\varepsilon\le\frac{1}{2} \tag{31}$$

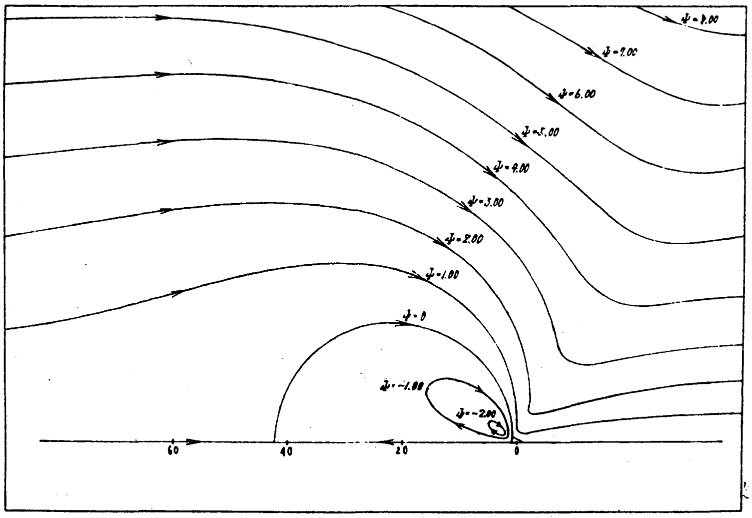
の場合，$\varepsilon=\frac{1}{2}$ は曲正三角形となり，基礎式を求める境界層近似自身が使えなくなる。$\varepsilon\to 0$ は円であるので，ε が小さい時を問題にする。



上図は $\varepsilon=1/8$ の時の図である。Joukowski 翼の時と同様 x の正軸の方向の方へ先細りになっているので，物体の形という面から考えれば，前節と同様になると思えるが，結果は

$$(u_1-iv_1)_\infty = 12\,\varepsilon^3$$

となり，正の方向の流れが残る。$\varepsilon=\frac{1}{4}$ の時の物理面に於ける流線図は次頁に示す様なものになる。§2 の結果からの予想とは逆になった様な気がする。このために，§2 のもの



は，Cusp の影響ではないか，という疑問が湧く。

(b) 一般 Joukowski 翼

このために，Cusp が図形~~の内部~~に現われない様に

$$z = \frac{3}{8}a\left[\zeta - \frac{1}{2a} + \frac{(1/2a)^2}{\zeta - 1/2a}\right], \quad a \geq 1 \qquad (32)$$

なる写像を考える。$a \to 1$ の極限は §2 に戻るわけであるが，この解析は，全く問題の本質と関係のない点で非常に複雑になる点を除けば，本質的には全く Joukowski 翼の場合と同一であるという結果に到達する。つまり，§2 の結果は Cusp の影響ではないということである。

以上を考え合はせると，物体の形を見ただけで，どちらの方向の流れが残るかという問題には，今の所答える方法は見付からない。物体の形，したがって，その表面の速度分布，

が非常に大きく効いているとは考え易いが，果してこれだけかどうか，一般論は難しい様に思はれる。

§3 の部分は，詳述すると問題の本質を見失うおそれがあるので，この程度にしておきたい。

参考文献

1) M. J. Lighthill : Proc. Roy. Soc. 224 (1954) 1.

2) N. Riley : J. Inst. Maths. Applics., 3 (1967) 419.

3) H. Schlichting : 'Grenzschicht Theorie' (Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965) 401.

4) J. T. Stuart : 'Laminar Boundary Layers' (Oxford Univ. Press, Ed. by Rosenhead, 1966) 381.

5) G. K. Batchelor : 'An Introduction to Fluid Dynamics' (Cambridge Univ. Press., 1967) 353.

6) H. Schlichting : Phys. Zeits., 33 (1932) 327.