数理解析研究所講究録
第217巻 1974年 26-32

Tetrahex と Trihex による 'Hexagon' の詰合せ

野下浩平
(電気通信大学 電子計算機学科)

問題：7つの Tetrahex と3つの Trihex (図1.) と図2. の 'Hexagon' (六角形) に詰合せる解の総数はいくつか？

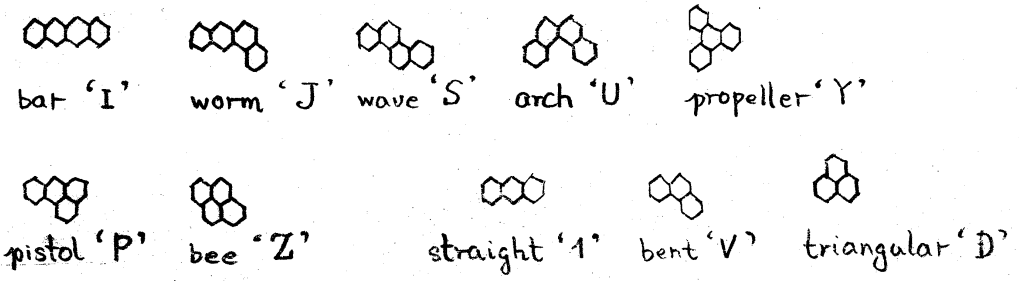


図1. Tetrahex と Trihex

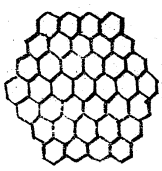


図2. 'Hexagon'

答： 12,290 通り.

(但し，回転，裏返しによって同一になる解は，繰返しては数えない.)

この問題の由来については，[1] 参照．

解の総数は，バックトラック（backtrack，‘行きつ戻りつ’）の探索方法（[2]）に基くプログラムにより，計算機で求めた．ここでは，プログラムの作成上の着眼点について略述する．

全体の方針としては，未解決の問題であったので，プログラムを簡単に作り，全体として早く結果を求めることである．

‘Hexagon’（盤（board）という）に，図3.に示すように一連番号をふり，その番号順に10個の駒（piece）を次々に置いていくことにより，すべての置き方を数えあげる．

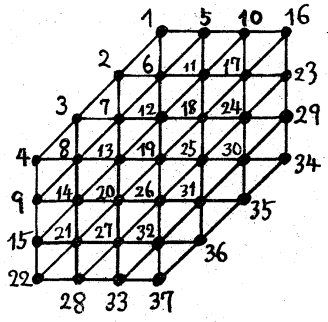
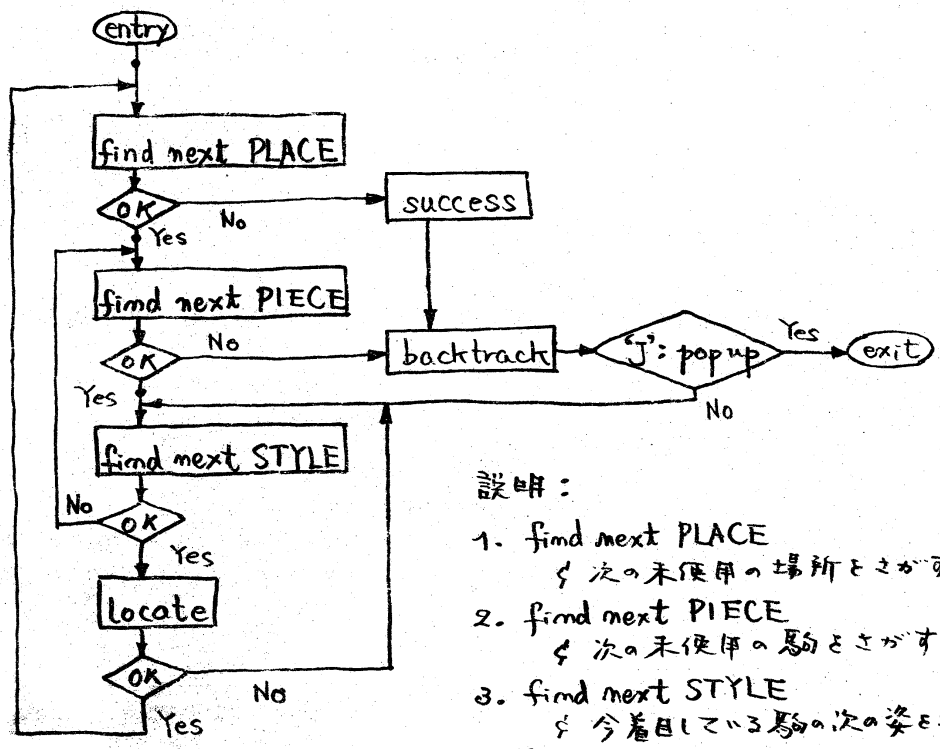


図3．‘Hexagon’（盤）の番号づけ†

互に対称（回転と裏返し）な解を除くため，駒‘J’の置き方を図6.のように18種類にわけて，各場合（初期配置）について調べる．1つの‘J’の初期配置に対してのプログラムの概略を図4.に示す（このプログラムの形は，特に今の問題に限らず，バックトラック法一般に通じるものである．こ

† 印刷の形式に合わせて座標軸を定めている（cf. 図7.）．

の図を直接コーディングすることにより，制御の流れに関わるオーバヘッドも（goto により）極小にできるであろう．



説明：

1. find next PLACE
   ∮ 次の未使用の場所をさがす ∮
2. find next PIECE
   ∮ 次の未使用の駒をさがす ∮
3. find next STYLE
   ∮ 今着目している駒の次の姿をさがす ∮
4. locate
   ∮ 盤に駒を置けるか否かを調べる．
   もし置けるなら，実際に置く ∮
5. success
   ∮ 1つの解がみつかった ∮
6. backtrack
   ∮ 直前の状況に復帰する ∮
7. 'J': pop up
   ∮ 駒 'J' まではがしたか？ ∮

図4. バックトラック法による探索プログラム
（駒 'J' の1つの初期配置に対して）

次にプログラムで扱うデータについて述べる.

静的な(探索中変化しない)データは,次の通りである.

i) 盤の各場所(37ヶ所)に対して,駒が置かれる際に関係する(9種類の)まわりの場所の一覧表.

ii) 各駒(10ヶ所)に対して,その姿を示すデータの集り(cf. 3)の先頭へのポインタの一覧表.

iii) 駒がおかれる際の姿(style;向きと裏表)を,その起点(盤上で番号が一番若くなる駒上の位置;◉で示す)から出発して,各位置を相対位置で表わしたデータの一覧表.例えば,駒'Y'に対しては,姿は,2種類であり,各姿は,図5.の点線で示される相対位置を示す番号の3つ組で表わされる.

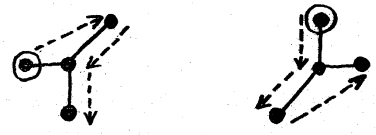


図5. 駒'Y'の姿の表現

動的な(探索中変化する)データは,次の通りである.

iv) 盤の使用状況(未使用を示す値が置かれている駒の番号;印刷にも用いる)をいれる大きさ37の1次元配列.

v) 駒の使用状況(使用中か否かを示す値)をいれる大きさ10の1次元配列.

次の3つは,添数Iで指される深さ10のスタックである.

6) 第I番目におかれた駒(の番号),

7) その駒の姿(の番号),

8) その姿の起点の盤上の場所.

上記データは,冗長なものもあるが,探索中に無駄な手間を省くために導入している.(補助的なデータが他に少しある.)

バックトラック法については,

"制限の強い場所からまず試せ"

という'哲学'がここでも有効である.駒'J'の初期配置を図6.のように定めたのは,'複雑な形状'が早い段階で現われるように考慮したものである.

盤の場所の選択を(盤の状況によって)動的に計算するとか,動的な対称性のチェック(詰合せパズルでは,局所的な対称性が数多く現われるものが多い)等,速度向上のための工夫が思いつくが,この問題については,その規模からみても,静的なもので十分であった.

プログラムは,FORTRANで書いている(使用計算機は,HITAC 8350).大きさ(カード枚数)は,次の通り.

プログラム全体　約250枚

---

† 使用した計算機システムの事情により,プログラムの実行を何度か中断した.'復旧'は,LPの印刷結果を見てCardで途中のデータを再入力する原始的なものであるが,6),7),8)の内容(と'J'パラメタ)を用いると簡単に復旧できる.

内訳：・MAINと初期設定 ------ 80 枚

・探索部分 (cf. 図4.)------ 120 枚
（復旧手続き ------ 20 枚）

・印刷 ------ 30 枚

（うち 宣言，詳述等は，60枚）

図6. は，駒'J'の初期配置と各々に対する解の数である．

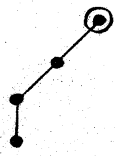
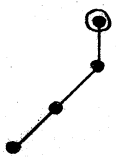
起点⊙がおかれる盤上の場所 ＼ 姿				
1	2,400	499	169	138
2	6,024	1,351	173	0
5	238	243	196	141
6	172	113	130	139
11	48	116	——	——

図6. 駒'J'の初期配置と解の数

解の総数は，川合慧氏（東大・理），竹内郁雄氏（電々公社通研）によってその後各々求められたが，異なる人が異なる計算機で異なるプログラムによって同じ結果を得たので，"総数"が正しいことは，確実であろう．（数えあげる以外に検証の方法がない時の"検証の実例"である．）なお蛇足

た計算時間は，いずれも数時間である．

図7.に，駒'J'の1つの初期配置に対するいくつかの解の印刷例を載せる．

JYVV	JYVV	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU
JUYYV	JUYYV	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU
JUYSDD	JUYPPP	JSYPUV	JSYPUV	JSYPUV	JSYPUV	JSYPUZ
IJUUSDP	IJUUPSS	IJSPPPV	IJSPPPV	IJSPPPV	IJSPPPV	IJSPPZZ
IZZSPP	IDDSS1	ISZZDV	IS111V	IS111V	ISDZZV	ISPVDZ
IZZSP	IDZZ1	IZZDD	IZZDD	IDDZZ	IDDZZ	IVVDD
I111	IZZ1	I111	IZZD	IDZZ	I111	I111

JYUU	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU
JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU
JSYPUD	JSYPUD	JSYPUZ	JSYZUD	JSYZUP	JSYZUP	JSYZUV
IJSPPDD	IJSPPDD	IJSPPZZ	IJSZZDD	IJSZZPP	IJSZZPP	IJSZZPV
ISVVP1	ISVVP1	ISDVPZ	ISVZP1	ISVZP1	ISDZPV	ISDZPV
IVZZ1	IZZV1	IDDVV	IVPP1	IVDD1	IDDVV	IDDPP
IZZ1	IZZ1	I111	IVP1	IVD1	I111	I111

JYUU	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU	JYUU
JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU	JSYYU
JSY1UD	JSY1UD	JSY1UV	JSY1UZ	JSY1UZ	JSYVUP	JSYVUZ
IJS1VDD	IJS1VDD	IJS1DDV	IJS1PZZ	IJS1DZZ	IJSVPP1	IJSVPZZ
IS1PVV	IS1VPP	IS1PDV	IS1PPZ	IS1DDZ	ISZVP1	ISDVPZ
IZZPP	IZZVP	IZZPP	IVPDD	IVPPP	IZZD1	IDDPP
IZZP	IZZP	IZZP	IVVD	IVVP	IZDD	I111

図7.　解の印刷例

参考文献

[1] 一松信，"計算機によるプラパズル — とくにテトラヘックスとペントキューブ，" 京都大学数解研講究録 98 (1970), 3－11.

[2] S. W. Golomb, et. al., "Backtrack Programming," JACM, 12, 4 (1965), 516－524.