数理解析研究所講究録
第217巻 1974年 83-89

新しい問題（計算機によるパズルのための）

京大・数理研　一松 信

0. はじめに

はしがき，および経過報告にあるように，プログラミングシンポジウムの折に"彫刻の森問題"として，下記のものをとりあえず標準問題とすることにした．

第一種（未解決のもので解答を早く報告する）1° Tetra-hex + Trihex．　2° Tetra-ball（正八面体）

第二種（既知のもので，探索スピードを早める）立体ペントキューブ（5×4×3の直方体，解3940通り）

第三種（計算機によるゲーム）1° Hex．　2° オセロ．

このうち第一種の1°は，野下浩平，川合慧，竹内郁雄の諸氏により，12290通りという解が確立したことは，本報告集にあるとおりである．第三種はさしあたってHexのみとした．（各種の定義も今回，議論の対象になった．）

新しい問題をどのように募集し審査するか，という体制については，多少の討論があったが，確定しなかった．ここにのべるのは，一つの参考案にすぎない．ただしペントミノーで最大面積を囲む問題は（私が提出したものではないが），第一種の標準問題の一つとして，正式にとりあげることになったの

で，少し詳しく解説する。

1. n-Queens Game

$n \times n$ の正方形のます目に n 個の Queen（飛車＋角の動き方をする駒）を，互いに他にあたらないようにおいた形を，n-Queens configuration とよぶ．これをゲームとしたら，どうなるか？すなわち交互に Queen をおいて，おけなくなった方を負けとするとき，先手必勝かそれとも後手必勝か？

n が奇数なら，はじめに中央において，まねする手で，先手必勝である．n が偶数のときは，よくわからないが，$n=6$ のときは先手必勝のようであり，$n=8$ も先手必勝らしい（野崎昭弘氏による）．$n=8$ は，手でも解析可能だが，これを計算機で完全に解析すること（さらに $n=10, 12, \cdots$ と進めること）が問題である．

余談ながら，$1, \cdots, n$ の置換 $(a_1, \cdots, a_n)$ を，$n \times n$ の盤の (i, a_i) $(i=1, \cdots, n)$ の位置に駒をおいて表現すると，

$$\forall\ i \neq j \text{ ならば，} \quad |a_i - a_j| \neq |i-j| \qquad (1)$$

をみたす置換は，ちょうど n-Queens configuaation と対応する．最近（ある雑誌を介して手紙で），ある人から，(1) および

$$\forall i, \quad i \neq a_i \qquad (2)$$

をみたす置換があるか（というより"ないだろう"という予想）

と質問をうけた。これは主対角線上に駒が無い n-Queens configuration があるか，ということである。$n \leqq 6$ ならばないが，$n=7$ になると，図1のような配置（およびこれを回転・反転したもの計4個）がある。図1は手で二三分でできたが，後に計算機で調べてみたら，$n=7$ のときには本質的にこれ（およびこれを回転・反転したもの計4個）しかないことがわかった。――人間のパタン認識能力は捨てたものではないらしい？――

2. Cram

これは何度も独立に提案されたゲームで，図2のような方形のます目から，交互に2個相隣るます目をとる（あるいはそこにドミノをおく）ゲームである。[1]（Cram は"つめこむ"意味）対称性があるときは，まねする手がきくが，それ以外の必勝法は僅かしかわかっていない。盤が $1 \times n$ のとき，標準形（最終着手者が勝）のゲームは，Grundy 函数[2]の理論によって完全に解かれており，後手必勝なのは n が

$$n \equiv 5, 9, 21, 25, 29 \pmod{34}, \text{ および } n = 0, 1, 15, 35$$

のとき，かつそのときに限ることが証明されている。[3] しかし逆形（最終着手者が負）のゲームの解析はまったくされていないらしい。この研究を問題とする。

逆形のときには，Grundy 函数のような一般論はなさそ

うで，さしあたっては，忠実に recursive にゲームの木を追いかけるしかない。手でやってみて，nが小さいときは，

$n = 2, 3, 7, 8, 12, 16, 17, 21, 22, 26, 30, 31, 35, 36, 40, \cdots$

のとき後手必勝であることがたしかめられたが，もう少し先まで計算機で解析して，できれば"法則"をみつけたい。ゲームの木をいかにおいかけ，どのようなデータ構造で扱うか（とくに記憶容量の小さい計算機で）という技術的な興味もある。なおこの変形ゲームがいろいろと論文[1]に紹介されている。

3. ペントミノーで最大面積を囲む問題

これも有名な問題である。ペントミノー12個で，最大面積を囲むもので，発案者の名により，Feser の問題[4] といってもよい。このうち内部も外部も方形としたときは，最大面積 4×7＝28，内部を方形としたときは 9×10＝90，外部を方形としたときは，61単位である[5]。外部も内部も形を自由としたときは未解決で，永らく図3の127単位が最大と思われていたが，Knuth が図4の128単位の解を求めた。[6] ただしこれが最大という証明はまだない。これ以上の解をもとめること，ないしは計算機によって，これが最大であるという証明をすることが問題である[7]。また128単位の解が本質的に何種あるかを探索することも，部分的問題である。

これは箱詰めパズルとは異なった種類の問題である。もちろん原理的には，たとえば12個のペントミノーの輪状列（11!/2）を作り，平面を囲むものを求めて，その内部の面積を計算してゆけば，有限回の手続きで完了するはずであるが，データの表現に工夫をしないと，実行不可能であろう。

4. ジグソーパズルその他

これらとまったく別種の問題として，ジグソーパズル（はめ絵パズル）を計算機にやらせることが，相当の時間議論された。形だけの比較ならば，可能であろうが，図の模様の連続性（人間の場合はかなり重要）の情報をとりこむことは，現状ではきわめて困難であり，その意味で人間と対等に考えるのは無理であろうということで見送りとなった。しかし人工智能研究の一課題としては興味がある課題である。

その他プログラムの評価の問題とか，数学の定理（を適当な形に表現したもの）が本質的に同一のものであることを判定させる問題も話題になった。もちろんこれらは適当に定式化すれば，本質的に"決定不能"な問題になるはずで，じっさいに"自明な反例"をあげた人も多い。なんらかの"実用的便法"を考えることが，これからの研究課題であろう。

88

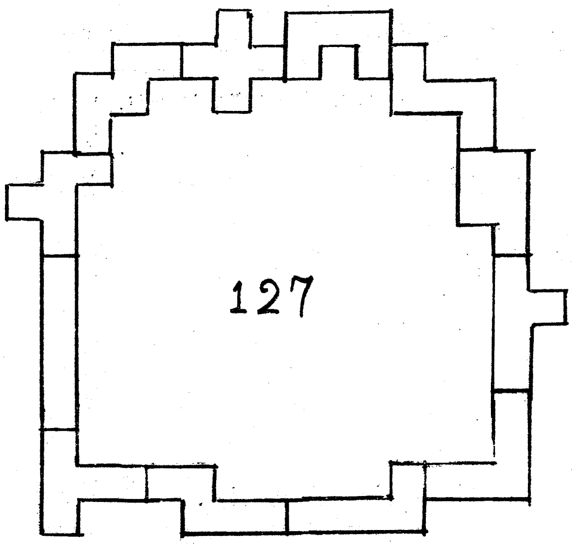

図3

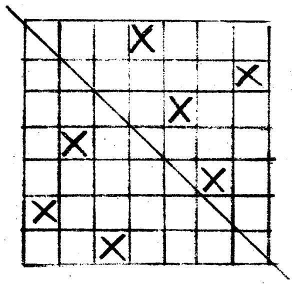

図1

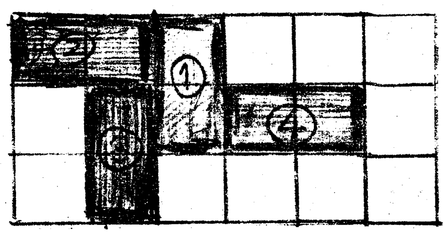

図2

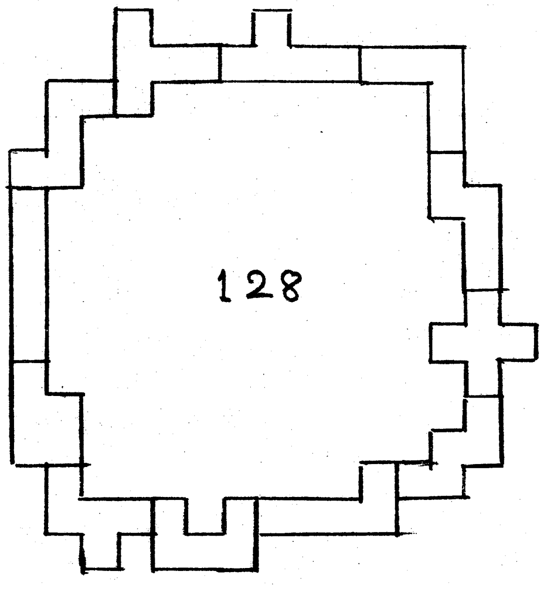

図4

参考文献

[1] M. Gardner, Mathematical Games, Scientific Amer. 1974, 2月号 — 日本語訳, サイエンス, 1974, 4月号

[2] M. Sato, Grundy functions and linear games, Publ. R.I.M.S., 7 (1972), 645—658

[3] S. Hitotumatu, Some remarks on nim-like games. 立教大学数学雑誌 17 (1969), 85—98. (とくに p.95, Table 3)

[4] V. G. Feser, Pentomino farms, J. of Recreational Math., vol. 1, No. 1 (1968), 55—61; 討論が vol. 1, No. 4 (p. 234) および vol. 2, No. 3 (1969), (p. 187) にある.

[5] M. Gardner, Mathematical Games, Scientific Amer. 1973, 5月号 — 日本語訳, サイエンス, 1973, 7月号

[6] M. Gardner, 同上 6月号 — 日本語訳, 8月号.