数理解析研究所講究録
第220巻 1974年 24-37

測地線の指数定理について

九大工　　酒井　隆

一般の境界条件の下での測地線の指数定理は W. Ambrose ([1]) によって与えられている。しかしその証明は非常に繁雑であって、しかも誤りを含んでいた。その誤りは大槻先生によって指摘され、高橋先生によって訂正された([7])。その後 M. Klingmann ([5]) は Hilbert space 上の2次形式の理論を用いることによって、より一般の指数定理を得ている。

最近 W. Klingenberg ([3], [4]) は geodesic flow の観点から閉測地線に対する指数定理を得た。その方針は簡明で、幾何学的に興味深い。ここでは Ambrose の指数定理をこの観点から証明できることを述べる。実際我々は Jacobi 場の基本的な性質だけを必要とする。§1 では geodesic flow の観点から Jacobi 場を特徴づける。Ambrose による共役点の概念はよく知られているとはいえないので §2 では指数定理をきちんと書くことにする。§3 でその証明の概略を述べる。

1° 準備。(M^{n+1}, g) を $n+1$ 次元 riemann 多様体, $\pi: TM \to M$ を M の接 bundle とする。$K: TTM \to TM$ を g の Levi-Civita 接続に関する接続写像とする([2])。このとき、各 $X \in T_xM$ に対して $\varphi: T_X TM \to T_xM \oplus T_xM$ を $\varphi(\hat{X}) := (\pi_* \hat{X}, K\hat{X})$ で定義すれば、これは linear isomorphism である。$\operatorname{Ker} \pi_*$ の元を vertical vector, $\operatorname{Ker} K$ の元を horizontal vector と呼ぶ。以下 φ によって $T_X TM$ と $T_xM \oplus T_xM$ を同一視することにして $\hat{X} := (X_h, X_v)$ と書くことにする。次に φ_t を geodesic flow とする。すなわち $X \in TM$ に対して、c を $c(0) = \pi(X)$, $\dot{c}(0) = X$ なる測地線(affine parameter)とするとき, $\varphi_t X := \dot{c}(t)$。$\varphi_t$ の定義する TM 上の vector 場 ξ が geodesic spray で、上の notation で $\xi_X = (X, 0)$。

さて geodesic flow の orbit は測地線によって決定されるが、geodesic flow で不変な vector 場を実は Jacobi 場で特徴づけることができる。次の補題は Klingenberg による。(Prof. Klingenberg は仙台での講演でこの補題の Fermi 座標を用いない簡単な証明がないか?と云われたので、その様な証明をつけておく)。

<u>Lemma</u>. $(A, B) \in T_X TM$, $(\varphi_t)_*(A, B) = (X_h(t), X_v(t))$ を geodesic flow invariant な TM 上の vector 場とする。このとき、$X_h(t)$ は $X_h(0) = A$, $\nabla X_h(0) = B$ をみたす $c(t) =$

$\pi\varphi_t X$ に沿っての Jacobi 場で、$X_v(t) = \nabla X_h(t)$ が成立する。ここに ∇ は $c(t)$ に関する共変微分を表わす。逆に $X_h(t)$ を $X_h(0)=A$, $\nabla X_h(0)=B$ なる測地線 $c(t)$ に沿っての Jacobi 場とすれば、$(X_h(t), \nabla X_h(t)) = (\varphi_t)_*(A, B)$.

証明). $X(s)$ を $X(0)=x$, $\dot{X}(0)=(A, B)$ をみたす TM 内の curve とする。このとき $s \longrightarrow \pi\circ\varphi_t\circ X(s) = \exp_{\pi X(s)} tX(s)$ は $s=0$ で接ベクトル

$$\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}^{\bullet(s)}\Big|_{s=0} = \pi_*\circ(\varphi_t)_*\dot{X}(0) = \pi_*\circ(\varphi_t)_*(A, B) = X_h(t)$$

を持つ。ここに $t \to \pi\circ\varphi_t\circ X(s)$ は各固定された s に対して測地線であるから、$X_h(t)$ は Jacobi 場となる。明らかに

$X_h(0) = \pi_*(A, B) = A$ であり、$D_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial s}$ とおけば

$$\nabla X_h(0) = \nabla_{D_1} X_h(0) = \nabla_{D_1}\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}^{\bullet(s)}\Big|_{s=0,t=0} = \nabla_{D_2}\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}^{\bullet(t)}\Big|_{s=0,t=0} = \nabla_{D_2}\varphi_t\circ X(s)\Big|_{s=0,t=0} = \nabla_{D_2}X(s)\Big|_{s=0} = K X_* D_2\Big|_{s=0} =$$

$K\dot{X}(0) = B$. を得る。他方.

$$\begin{aligned} X_v(t) &= K(\varphi_t)_*(A, B) = K\overbrace{\varphi_t X(s)}^{\bullet(s)}\Big|_{s=0} = \nabla_{D_2}\varphi_t\cdot X(s)\Big|_{s=0} \\ &= \nabla_{D_2}\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}^{\bullet(t)}\Big|_{s=0} = \nabla_{D_1}\overbrace{\pi\circ\varphi_t\circ X(s)}^{\bullet(s)}\Big|_{s=0} = \nabla_{D_1}(\pi\circ\varphi_t)_*(A, B) \\ &= \nabla_{D_1}\pi_*(\varphi_t)_*(A, B) = \nabla\cdot X_h(t). \end{aligned}$$

逆は Jacobi 場 X_h が $X_h(0)$, $\nabla X_h(0)$ によって一意に決まることから明らかである。証明終り。

TM 上には Sasaki metric G が

$G(\hat{X}, \hat{Y}) := g(\pi_*\hat{X}, \pi_*\hat{Y}) + g(K\hat{X}, K\hat{Y})$ $\quad \hat{X}, \hat{Y} \in TTM$

によって導入される。さて次に $\pi_1 : T_1M \to M$ を g に関する M の単位接 bundle、G_0 を $\iota : T_1M \hookrightarrow TM$ により、G から induce される riemann 計量とする。$X \in T_1M$ に対して $\varphi | T_X T_1M$ は $T_X T_1M$ から $T_{\pi_1(X)}M \oplus \perp X$ ($\subset T_{\pi_1(X)}M \oplus T_{\pi_1(X)}M$) の上への linear isomorphism である。ここに $\perp X$ は $T_{\pi_1(X)}M$ における、g に関する X の orthogonal complement。前と同様に $T_X T_1M$ と $T_{\pi_1(X)}M \oplus \perp X$ を同一視する。さて geodesic spray ξ は T_1M に接していることを注意する。$T^{2n}_X T_1M$ ($X \in T_1M$) $:= \perp \xi_X$ (G_0 に関する ξ_X の $T_X T_1M$ における orthogonal complement) とおけば、上の notation で $T^{2n}_X T_1M := \perp X \oplus \perp X$ 最初の直和因子を $T^n_X h$, 第2の直和因子を $T^n_X v$ と書くことにすれば、$T^{2n}_X T_1M := T^n_X h \oplus T^n_X v$. $T^n_X h$ ($T^n_X v$) を $T^{2n}_X T_1M$ の"水平部分"("垂直部分")と呼ぶ。

さて M に正規測地線 $c : [a,b] \to M$ が与えられているとする。$\dot c : [a,b] \to T_1M$ により $T^{2n}T_1M \to T_1M$ の induced bundle $\tau^{2n} : V^{2n} \to [a,b]$ を得る。ここに各 fiber $\tau^{2n}(t) = V^{2n}(t) = T^{2n}_{\dot c(t)} T_1M = \tau^n_h(t) \oplus \tau^n_v(t)$ は水平部分 $\tau^n_h(t)$, 垂直部分 $\tau^n_v(t)$ に分解される。このとき、τ^{2n} 上には、

$$2\alpha((X_h, X_v), (Y_h, Y_v)) := g(X_h, Y_v) - g(Y_h, X_v)$$

によって、symplectic 形式 α が定義される。geodesic flow Φ_t は各 fibre $V^{2n}(t_0)$ を $V^{2n}(t+t_0)$ に写す。Lemma より

Φ_t－不変な section が c に垂直な Jacobi 場で特徴づけられる。Jacobi 場の簡単な性質から $d\Phi_t$ は symplectic 形式 α を不変に保つ。最後に言葉の約束をする。$V^{2n}(t)$ の部分空間 W は $\alpha|W\equiv 0$ をみたすとき "isotropic" な部分空間と呼ばれる。Φ_t－inv. なての cross-section $\hat{Y}(t)$ にたいして $\hat{Y}(t):=(Y(t),\nabla Y(t))$ と書くことにする。

2° 指数定理．(M^{n+1},g) を riemann 多様体．K, L を M の部分多様体，$c:[a,b]\to M$ を $c(a)\in K$，$\dot{c}(a)\perp T_{c(a)}K$; $c(b)\in L$，$\dot{c}(b)\perp T_{c(b)}L$ をみたす測地線とする。我々は K, L を結ぶ c に近い曲線で c より短いものがどれ位存在するかという問題を取扱うことにする。以下 g から定義される接空間の内積を "$\langle\ ,\ \rangle$" で表わす。

<u>2.1 境界条件</u>．$t\,(\in[a,b])$ における境界条件とは，$\mathcal{S}=(S,A_S)$ という対で，ここに S は $\perp\dot{c}(t)\,(\subset T_{c(t)}M)$ の部分空間．$A_S:S\to S$ は $\langle\ ,\ \rangle$ に関して self-adjoint な線形写像である．

Example 1．P を $c(t)\in P$，$\dot{c}(t)\perp T_{c(t)}P$ なる M の部分多様体，$H_{\dot{c}(t)}$ を P への法線方向 $\dot{c}(t)$ に関する第2基本形式とする。

$$S:=T_{c(t)}P\ ;\ \langle A_S X, Y\rangle := H_{\dot{c}(t)}(X,Y)\quad X,Y\in S.$$

と定義すれば、これによって t における境界条件 $\mathcal{S}=(S,A_S)$

を得る。

$\mathcal{J}$ で c に沿う Jacobi 場で，c に垂直なもの全体のつくる vector 空間を表わす。t における境界条件 (S, A_S) が与えられたとき，

$$\mathcal{J}_S^* := \{ Y \in \mathcal{J} \mid Y(t) \in S,\ \nabla Y(t) - A_S Y(t) \perp S \}$$
$$\mathcal{J}_S := \{ Y \in \mathcal{J} \mid Y(t) \in S,\ \nabla Y(t) = A_S Y(t) \}$$

と定義する。明らかに $\dim \mathcal{J}_S^* = \dim M - 1$, $\dim \mathcal{J}_S = \dim S$。

Example 2. $\mathcal{S} = (S, A_S)$ (resp. $\mathcal{T} = (T, A_T)$) を a (resp. b) における境界条件とする。このとき、$t \in [a, b]$ における境界条件 $\mathcal{S}^*(t)$, $\mathcal{T}(t)$ を次の様に定義する。

(i) $S^*(t) := \{ Y(t) \mid Y \in \mathcal{J}_S^* \}$ (resp. $T(t) := \{ X(t) \mid X \in \mathcal{J}_T \}$)

(ii) $A_{S^*(t)} Y(t) := pr_{S^*(t)} \nabla Y(t)$ (resp. $A_{T(t)} X(t) := pr_{T(t)} \nabla X(t)$).

ここに，$pr_{S^*(t)} : \perp \dot{c}(t) \to S^*(t)$ 等は直交射影を表わす。

(ii) は well-defined であることを注意する。$\mathcal{J}_S^* = \mathcal{J}_{S^*(t)}^*$ であるが，$\mathcal{J}_T$ と $\mathcal{J}_{T(t)}$ とは一般に一致しない。

2.2. 共役点　$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ をそれぞれ a, b における境界条件とする。$t_0 \in (a, b)$ に対して vector 空間 $C(t_0)$ を

$$C(t_0) :\overset{\text{def}}{=} \{ Z(t) \mid \exists\, Y \in \mathcal{J}_S^*,\ X \in \mathcal{J}_T \text{ such that}$$
$$Z(u) = Y(u) ;\ u \leq t_0,\quad Z(u) = X(u) ;\ u \geq t_0 ;$$
$$\nabla Y(t_0) - \nabla X(t_0) \perp T(t_0) \}.$$

で定義する。

明らかに $\mathcal{J}_{S}^{*}\cap\mathcal{J}_{T}\subset C(t_0)$ であるが、$\pi(t_0) := \dim C(t_0)/\mathcal{J}_{S^*}\cap\mathcal{J}_T$ が正となるとき、t_0 を ordered pair $\mathcal{S},\mathcal{T}$ の共役点と呼び、$\pi(t_0)$ をその位数と呼ぶことにする。

2.3. 指数定理　c, K, L を最初に仮定した通りとし、$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ を K, L から example 1 のやり方で得られた境界条件とする。

$\Xi := \{$ c に沿っての piecewise smooth vector field $\xi(t)$ で
$\xi(a)\in\dot{S}=T_{c(a)}K$, $\xi(b)\in T=T_{c(b)}L$ をみたすもの $\}$.

$RX(t) := R(\dot{c}(t), X(t))\dot{c}(t)$（右辺の R は曲率テンソル）とおいて、$\Xi$ 上の指数形式 I_{ST} を次の様に定義する。

$$I_{ST}(X,Y) := \int_a^b \{\langle DX(t), DY(t)\rangle + \langle RX(t), Y(t)\rangle\}\,dt + \langle A_S X(a), Y(a)\rangle - \langle A_T X(b), Y(b)\rangle$$

$$\Big[= \int_a^b \{\langle RX(t) - DDX(t), Y(t)\rangle\}\,dt + \sum_{a<t<b}\langle DX(t-0) - DX(t+0), Y(t)\rangle + \langle DX(b) - A_T X(b), Y(b)\rangle - \langle DX(a) - A_S X(a), Y(a)\rangle \Big]$$

I_{ST} は Ξ 上の対称な双一次形式でその指数（i.e. I_{ST} が負定値となる Ξ の maximal subspace の次元）が、"K, L を結び c により短い曲線がどれ位存在するか" を表わしている。

さて Ambrose の指数定理は、index I_{ST} が $\mathcal{S},\mathcal{T}$ の共役点の位数の和と "Convexity" で表わされることを主張している。

すなわち

「Ambrose の指数定理.

$$\text{Index of } I_{ST} = \sum_{a<t<b} \bar{n}(t) + \text{Convexity}. \quad \rfloor$$

ここに Convexity は次の様に定義される。$\mathcal{N} := \{X \in \mathcal{J}_T \mid X(a) \in S\}$ とおくとき，$\mathcal{N}$ 上では

$$I_{ST}(X, X') = \langle A_S X(a) - \nabla X(a), X'(a) \rangle$$

が成立する。このとき，

$$\text{Convexity} := \text{index } I_{ST}|\mathcal{N} + \dim(\text{Null space of } I_{ST}|\mathcal{N}) / \mathcal{J}_S^* \cap \mathcal{J}_T.$$

3° 定理の証明。以下 geodesic flow の観点から Ambrose の指数定理の証明の概略を述べる。

第一段. まず与えられた境界条件 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ から $V^{2n}(b)$ の n 次元 isotropic subspace $V^n(b)$ を構成できることを示す。これは以下の証明で本質的な役割りを果す。

$N := S^*(b) \cap T$ とおいて，

$S^*(b) = S_1 \oplus N$, $T = T_1 \oplus N$, $\perp \dot{c}(b) = S_1 \oplus T_1 \oplus N \oplus A$

をそれぞれ $S^*(b)$, $\perp \dot{c}(b)$ の直交分解とする。$V^{2n}(b)$ の次の3つの部分空間を与える。

a): $\mathcal{V}_1 = \{\hat{Y}(b) = (Y(b), \nabla Y(b)) \mid Y \in \mathcal{J}_S^*, \nabla Y(b) - A_T \, pr_T Y(b) \perp T\}$.

と定義する。いま $\Phi : S^*(b) \longrightarrow N$ なる線形写像を

$$\Phi(Y) := pr_N(A_{S^*(b)} Y - A_T \, pr_N Y)$$

によって定義する。このとき，次の補題の成立することは容

易に分かる。

Lemma 1. $\hat{Y}(b) \in \mathfrak{V}_1 \iff Y(b) \in \operatorname{Ker}\Phi$ であって、

$$pr_{S_1} \nabla Y(b) = pr_{S_1} A_{S^*(b)} Y(b), \quad pr_{T_1} \nabla Y(b) = pr_{T_1} A_T\, pr_N Y(b)$$

$$pr_N \nabla Y(b) = pr_N A_{S^*(b)} Y(b) \ (= pr_N A_T\, pr_N Y(b))$$

b): $\Psi: N \to S^*(b)$ なる線型写像を

$\Psi(x) := pr_{S^*(b)} (\nabla Y(b) - \nabla X(b))$ — ここに $X \in \mathfrak{g}_T$ は $X(b) = x$, $Y \in \mathfrak{g}^*_{S^*(b)} = \mathfrak{g}^*_S$ は $Y(b) = x$ をみたす様にとる —— によって定義する。Ψ の定義は $Y(b) = x$ をみたす $Y \in \mathfrak{g}^*_S$ の選び方によらないことはすぐ分る。$\dim \Psi(N) = d$ とし、$x_1, \cdots x_d \in N$ を対応する $\Psi(x_1), \cdots \Psi(x_d)$ が $\Psi(N)$ の基底となっている様に選ぶ。X_i $(i = 1, \cdots, d) \in \mathfrak{g}_T$ を $X_i(b) = x_i$ となる様に選んでおいて、

$\mathfrak{V}_2 := V^{2n}(b)$ の部分空間で、$\hat{X}_i(b) = (X_i(b), \nabla X_i(b))$ $(i = 1, \cdots d)$ によって生成されるもの。

と定義する。明らかに $\dim \mathfrak{V}_2 = d$.

最後に

c): $\mathfrak{V}_3 = \{\hat{X}(b) = (X(b), \nabla X(b)) \mid X \in \mathfrak{g}_T,\ X(b) \in T_1\}$

と定義すれば、$\dim \mathfrak{V}_3 = \dim T_1$. $\mathfrak{V}_1 \cap \mathfrak{V}_2 = \{0\}$, $(\mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2) \cap \mathfrak{V}_3 = \{0\}$ であることは容易に分かる。更に Ψ は Φ の adjoint な線形写像に他ならないことを用いれば、補題1に注意して

<u>Lemma 2</u>. $V^n(=V^n(b)) := \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \mathbb{V}_3$ は $\mathbb{V}^{2n}(b)$ の n 次元 isotropic な部分空間である。

を示すことができる。

<u>第2段</u> さて $V^n_V(t) := \{\hat{Y}(t)=(Y(t), \nabla Y(t)) \mid Y \in \mathcal{J}, Y(t)=0\}$,

$V^n(t) := d\phi_{t-b} V^n(b) = \{\hat{U}(t) = (U(t), \nabla U(t)) \mid U \in \mathcal{J}, \hat{U}(b) \in V^n(b)\}$

$W(t) := V^n(t) \cap V^n_V(t)$

と定義する。この小節では ordered pair S, T の共役点を $W(t)$ によって記述することができることを示そう。そのために線形写像 $\chi_{t_0}: C(t_0) \longrightarrow W(t_0)$ を次の様に定義する。

$Z \in C(t_0)$ とする。定義によって、

$\exists\, X \in \mathcal{J}_T,\ Y \in \mathcal{J}_S^*$ such that

$Z(u) = Y(u) : u \leqq t_0$, $Z(u) = X(u) : u \geqq t_0$;

$\nabla Y(t_0) - \nabla X(t_0)\ (= \nabla Z(t_0-0) - \nabla Z(t_0+0)) \perp T(t_0)$.

いま $\hat{Y}(b) = (Y(b), \nabla Y(b)) \in \mathbb{V}_1$ であることがすぐ確かめられる。次に $X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$ — $\hat{X_2}(b) \in V_2$, $\hat{X_3}(b) \in \mathbb{V}_3$, $X_1(b) \in \mathrm{Ker}\,\Phi$ — と分解することができる。実は $\hat{X}_1(b) \in \mathbb{V}_1$ となることが示される。そこで

$\chi_{t_0} Z := \hat{Y}(t_0) - \hat{X}(t_0)$

と定義すれば、χ_{t_0} は $C(t_0)$ から $W(t_0)$ への線形写像である。さて χ_{t_0} は surjective であり、かつ $\mathrm{Ker}\,\chi_{t_0} = \mathcal{J}_T \cap \mathcal{J}_S^*$ であることは容易に示される。したがって、

Lemma 3. $\dim W(t) = \bar{n}(t)$ $a<t<b$. 特に $t_0 \in (a,b)$ が S, T の共役点 $\Longleftrightarrow$ $\dim \overline{W}(t) > 0$.

次の補題はよく知られている。

Lemma 4. $n_0 = \bar{n}(t_0) = \dim \overline{W}(t_0) > 0$ とする。$V^n(t_0) = d\Phi_{t_0 \to b} V^n(b)$ の基底 $\{\tilde{U}_i(t_0)\}_{i=1,\cdots,n}$ を $\{\tilde{U}_i(t_0)\}_{i=1,\cdots,n_0}$ が $\overline{W}(t_0)$ の基底となっている様に選ぶ。このとき、

(i) $\nabla U_i(t_0)$ $1 \leqq i \leqq n_0$, $U_j(t_0)$, $n_0+1 \leqq j \leqq n$ は $\perp \dot{c}(t_0)$ の基底を形成する。

(ii) $t \neq t_0$ が t_0 に充分近いとき、$\{U_i(t)\}_{1 \leqq i \leqq n}$ は $\perp \dot{c}(t)$ の基底である。

特に $\bar{n}(t)$ は有限個の t の値を除いて 0 である。

第3段. 補題3から

$$\mathrm{Index}\, I_{ST} = \sum_{a<t<b} \dim \overline{W}(t) + \mathrm{Convexity}$$

を証明できればよい。

まず S, T に関する共役点 $t_0 \in (a,b)$ に対して、$C(t_0)$ の $\mathcal{J}_S^* \cap \mathcal{J}_T$ に complementary な部分空間 $\zeta W(t_0)$ を選ぶ。このとき、$I_{ST}(\zeta W(t_0), \zeta W(t_0')) = 0$ であって、異なる t_0 の値に対する $\zeta W(t_0)$ は互いに独立である。次に、

ζ_0 : $I_{ST}|\mathcal{X}$ が負定値である様な $\mathcal{X}$ の maximal な部分空間.

$\mathfrak{S}_1$: $I_{ST}|\mathfrak{X}$ の null space の部分空間で $\mathfrak{g}_S^* \cap \mathfrak{g}_T$ に complementary なもの.

と定義する。明らかに $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}W = \bigoplus_{a<t<b} \mathfrak{S}\mathfrak{W}(t)$ は互いに独立であって $I_{ST}(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}W) = 0$ である。更に $I_{ST}|\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}W \equiv 0$ であって、$\mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}W$ の元は I_{ST} の null space $\mathfrak{g}_S^* \cap \mathfrak{g}_T^*$ に属さないことに注意すれば、

$$\text{index } I_{ST} \geqq \dim \mathfrak{S} = \sum_{a<t<b} \dim W(t) + \text{Convexity}.$$

ただし $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 \oplus \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}\mathfrak{W}$ とおいた。

<u>第4段</u> 上の不等式で実際に等号が成立することを確かめるには、

「$\xi \in \Xi$ が $I_{ST}(\xi, \zeta) = 0$ for $\forall \zeta \in \mathfrak{S}$ をみたせば、 $I_{ST}(\xi, \xi) \geqq 0$」が成立することを示せば充分である。

まず $I_{ST}(\xi, \mathfrak{S}W) = 0$ から、$\forall \hat{U}(t_0) \in W(t_0)$ $(a<t_0<b)$ に対して、

$$\langle \xi(t_0), \nabla U(t_0) \rangle = I_{ST}(\xi, Z) = 0, \quad \text{ただし } Z = (\chi_{t_0}|\mathfrak{S}W(t_0))^{-1} \hat{U}(t_0)$$

を得る。したがって補題4から $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} w^i(t) U_i(t)$ と書くことができる。ここで $d\phi_{t-b} V^n(b)$ の基底 $\{\hat{U}_i(t)\}_{1 \leqq i \leqq n}$ は $\{U_i(b)\}_{1 \leqq i \leqq t = \dim T}$ が T の基底になっている様に選ぶことができる。したがって $w^i(b) = 0$ $i > t$ としてよい。さて

$$I_{ST}(\xi, \xi) = \int_a^b | \dot{w}^i(t) U_i(t) |^2 dt - \langle \sum w^i(b) (A_T U_i(b) - \nabla U_i(b),$$

$\sum_j w^j(b)U_j(b)\rangle + \langle \sum w^i(a)(A_S U_i(a) - \nabla U_i(a), \sum w^j(a)U_j(a)\rangle.$

ここで $\xi(b)\in T$ より $\langle \sum w^i(b)(A_T U_i(b) - \nabla U_i(b), \sum w^j(b)U_j(b)\rangle = 0$ が分かる。次に $\xi(a)\in S$ であるから Jacobi 場 $\sum w^i(a)U_i(t)$ は $U_S(t)+U_T(t)$ ーただし $U_S(t)\in d\phi_{t-b}V_1$, $U_T\in\mathfrak{N}$ ーの形にかける。$I_{ST}(U_T, \varsigma_0\oplus\varsigma_1) = I_{ST}(\xi, \varsigma_0\oplus\varsigma_1) = 0$ が条件から成立し. ς_0, ς_1 の定義の仕方から、$I_{ST}(U_T, U_T)\geqq 0$ でなければならない。したがって.
$\langle \sum w^i(a)(A_S U_i(a) - \nabla U_i(a)), \sum w^j(a)U_j(a)\rangle = \langle A_S U_T(a) - \nabla U_T(a), U_T(a)\rangle = I_{ST}(U_T, U_T)\geqq 0.$
以上から $I_{ST}(\xi,\xi)\geqq 0$ を得る。(証明終り).

Remark. Ambrose は convexity を次の様に定義した。t を a に十分近いとして、$\Xi(S, T(t)) = c|[a,t]$ に沿っての piecewise smooth な vector 場で $\xi(a)\in S$, $\xi(t)\in T(t)$ をみたすもののつくる vector 空間、と定義する。index $I_{ST(t)}$ on $\Xi(S,T(t))$ で convexity を定義する。しかし上の証明は、これが $\dim\varsigma_0 + \dim\varsigma_1$ に等しいことも示している。

References

[1] Ambrose, W. The index theorem in Riemannian geometry, Ann.of Math., 73(1961) 49-86.

[2] Gromoll,D;Klingenberg,W;Meyer,W. Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Math. 55, Springer (1968).

[3] Klingenberg,W. Manifold with geodesic flow of Anosov type, Ann.of Math.(1974).

[4] ------------- The index theorem for closed geodesics, Tôhoku Math. J. (to appear).

[5] Klingmann,M. Das Morse'sche Indextheorem bei allgemeinen Randbedingungen, J.Diff.Geo.,1(1967) 371-380.

[6] Sakai,T. On the index theorem of Ambrose, to appear.

[7] Takahashi,T. Correction to [1]. Ann.of Math.80(1964) 538-541.