数理解析研究所講究録
第221巻 1974年 58-62

ホモトピー複素射影空間の対称度

新潟大 理学部　　渡部 剛

以下に述べることは[4]に既に発表されていることですから詳しいことは省略し要約だけにします。

以下 C^∞-category で考える。 compact, connected manifold M に対して $N(M) = \max\{\dim G \mid G$; compact connected Lie group which acts almost effectively on $M\}$ とおきこれを M の対称度という。

M は homotopy complex projective space (即ち M は compact connected $2n$-manifold で complex projective space $\mathbb{C}P_n$ と同じ homotopy type をもつ) とする。 [3]において $N(M) \geq n^2+2n$ $(= \dim SU(n+1))$ ならば $M = \mathbb{C}P_n$ で $N(M) = \dim G$ となる G は $SU(n+1)$ と locally isomorphic で M に transitive に作用することが示されている。 ここでは次の定理を証明する。

定理　$N(M) \geq \frac{1}{2}(n^2+3n+2)$ $(n \geqq 13)$ ならば M は $\mathbb{C}P_n$ に diffeomorphic である。

M に almost effectively に作用する compact connected Lie group G で $\dim G = N(M) \geqq \frac{1}{2}(n^2+3n+2)$ となるものを考える。$G = T^r \times G_1 \times \cdots \times G_s$ (T^r は r-次元トーラス, G_i は simple Lie group) としてもよい。

G が M に transitive に作用している場合は H を principal isotropy group とすれば H は連結で $\operatorname{rank} H = \operatorname{rank} G$ となり従って $H = T^r \times H_1 \times \cdots \times H_s$ (H_i は G_i の subgroup で $\operatorname{rank} H_i = \operatorname{rank} G_i$) となり $M = G/H = G_1/H_1 \times \cdots \times G_s/H_s$, これより $s=1$ がすぐわかる。従って G は $SU(n+1)$ と locally isomorphic で $M = \mathbb{C}P_n$ となる。

G が M に transitive に作用していない場合は H を上のようにすれば, $\dim G/H \leqq 2n-1$. 従って $\dim G > \frac{1}{8}(2n+7)\dim G/H$
[3] において次のことが示されている。

$\exists$ a simple normal subgroup (G_1 とする)

$$\dim G_1 + \dim N(H_1, G_1)/H_1 > \frac{1}{8}(2n+7)\dim G_1/H_1$$

$$\dim H_1 > \frac{2n-9}{2n-1}\dim G_1$$

ただし $H_1 = (H \cap G_1)^0$ (identity component), $N(H_1, G_1)$ は H_1 の G_1 における normalizer である。

$n \geqq 13$ ならば (G_1, H_1) の可能な組として次の場合が考えられる。

(1) ($Sp(m), Sp(m) \times Sp(1)$) $(n < 2m)$

(2) $(SO(m), SO(m-1))$ $(n < 2m)$

(3) $(SU(m), N(SU(m-1)))$ $(n \leqq 2m-2)$

(4) $(SU(m), SU(m-1))$ $(n < 2m-2)$.

ただし $N(SU(m-1))$ は $SU(m-1)$ の $SU(m)$ における normalizer である。

(1), (2) または (4) で type $SU(m)/N(SU(m-1))$ の orbit がない場合は orbit map $\pi : M \to M/G_1$ に対して $\pi^* : H^i(M/G_1 : Q) \to H^i(M : Q)$ が $i \leqq 3$ で isomorphism になることが Vietoris-Begle の定理よりわかる。従って $H^2(M : Q)$ の generator a に対して $a = \pi^*(b)$ $(b \in H^2(M/G_1 : Q))$ となり $a^n = 0$ がでて矛盾。

(3) または, (4) で type $SU(m)/N(SU(m-1))$ の orbit があり $F = F(SU(m), M) = \phi$ のときは, [1] の chap. XIV の議論により $f : M \to CP_{m-1}$ が存在して $f^* : H^2(CP_{m-1}) \to H^2(M)$ が injective となる。上と同様に矛盾が示される。

以上の議論から次の命題が示されればよいことになる。

<u>命題</u> $SU(m)$ が M に次のように作用すれば M は CP_n に diffeomorphic である。

(1) $n < 2m-2$ (2) principal isotropy group H の identity component は $SU(m-1)$ である。

(3) $F = F(SU(m), M)$ は non-empty である。

(4) type $SU(m)/N(SU(m-1))$ の orbit が存在する。

<u>補題</u> X が contractible $(2n+2)$-dim. compact manifold で S^1 が X 上に semi-freely に作用している。$(S^1, \partial X)$ は free とする。このとき $n \geqq 3$, ∂X が simply connected ならば $\partial X/S^1$ は $\mathbb{C}P_n$ と diffeomorphic である。

（証明の概略） $F(S^1, X)$ は一点 x_0 からなり $x_0 \in X - \partial X$. x_0 のまわりの disk nbhd. D^{2n+2} で S^1 が linear に作用しているものをとれば $\partial D^{2n+2}/S^1 = \mathbb{C}P_n$. $X - \mathrm{int}\, D^{2n+2}$ が $\mathbb{C}P_n$ と $\partial X/S^1$ の間の h-cobordism を与える。

<u>命題の証明の概略</u>

$F \neq \phi$ より $H = SU(m-1)$ となる。U を F の closed invariant tubular nbhd. とし $P = F(SU(m-1), M - \mathrm{int}\, U)$ とおく。$N = N(SU(m-1))$ とおき $M_{(N)} = \{ x \in M \mid SU(m)_x \in (N) \}$ とする。T を $SU(m)$ の maximal torus で $T \subset N$ となるものとすれば $F(T, M) \cap M_{(N)}$ $\cong \{ N(T, SU(m))/N(T, SU(m)) \cap N \} \times F(N, M_{(N)})$ が示され、これより F は連結, type $SU(m)/N$ の orbit は唯一つであることがわかる。[2] の結果より F は $\mathbb{C}P_{n-m}$ と同じ cohomology ring をもつことがわかる。P が contractible であることが示される。$M = S^{2m-1} \times_{S^1} P \cup D^{2m} \times_{S^1} \partial P$ となる, ただし $S^1 \cong N(SU(m-1))$

$/SU(m-1)$。 $\partial(D^{2m}\times P)$ は simply connected となることが示され，上の補題により $M = \mathbb{C}P_n$ となる。

注意 (1) $n \geqq 13$ の仮定はあまり本質的でない。

(2) 定理の結果が best かどうか今のところわからない。

文献

[1] Borel, A : Seminar on Transformation Groups. Ann. of Math. Studies 46. Princeton Univ. Press 1960.

[2] Bredon, G. E. : Introduction to compact Transformation Groups. Academic Press.

[3] Hsiang, W. Y. : On the degree of symmetry and the structure of highly symmetric manifolds. Tamkang J. of Math. 2 (1971) 1–22

[4] Watabe, T : On the degree of symmetry of complex quadric and homotopy complex projective space. Sci. Reports of Niigata Univ. 1974.