数理解析研究所講究録
第 222 巻 1974 年 64-70

"Chowlaの予想"に関する一注意

都立大 院生　田村 純一

§0 概説

$f(X)$を，最高次の係数が正である様な既約かつ強原始的な整係数の一変数多項式とする．ここで$f(X)$が強原始的であるとは，$G.C.M.\{f(m) \mid m \in \mathbb{Z}\}=1$ で定義するものとする．この時，集合 $f(\mathbb{N})=\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ の中に素数が無限に多くあるかどうかが問題になる．$\deg f=1$ の時には，$f(X)$ が強原始的であることと原始的であることとは同値であり，等差数列中の素数分布に関する問題としてDirichletの得た結果に見る通りである．$\deg f>1$ の時には，本質的な結果は知られていないが，予想あるいは仮定としてはいろいろな所に述べられており計算機による実験もなされている．(cf. [1], [2])

ここでは，$\deg f=2$ の時 最初に述べた条件を満たす$f(X)$について $f(\mathbb{N})$ の中に素数が無限に多くあるならば，少なくとも"Chowlaの予想"(cf. [3], ここでいう"Chowlaの予想"とは，[3]の中の七番目の問題を指す.)が，$s \equiv 1 \pmod 2$ の

時になりたつことを示す．すなわちMを平方数でない正の整数全体からなる集合とし，$s \in \mathbb{N}$ に対し，

$$M_s = \{d \mid d \in M \ \& \ (\sqrt{d} \text{ の正則連分数展開の周期の長さ}) = s\}$$

とする時，各 $s \in \mathbb{N}$ について M_s の中に素数が無限に多くあるかという事が"Chowlaの問題"であるが，ここでは最初に述べた条件を満たす二次の多項式 $F_s(X)$ で $F_s(\mathbb{N}) \subset M_s$ なるものが，各奇数 s について取れることを以下で示すことが目的である．

注意：[2]によると，f を最高次の係数が正の既約な一変数整係数多項式とし，$P(N)$ を $\{f(n) \mid n=1,2,3,\cdots,N\}$ の中の素数の個数とする時，

$$P(N) = \frac{C(f)}{\deg f}\int_2^N \frac{du}{\log u} + o\left(\int_2^N \frac{du}{\log u}\right)$$

を仮定して計算機で実験を試みている．（[2]では双子素数の問題等にも適用できる上の場合を含むより一般的な仮定を述べている．）ここで $C(f)$ は，f により定まる定数で，

$$C(f) = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\omega_f(p)}{p}\right)$$

$$\omega_f(p) = \#\{m \ (\mathrm{mod}.\ p) \mid m \in \mathbb{Z}\ ;\ f(m) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}.\ p)\}$$

である．

ここで f が強原始的であることと，すべての素数 p について $\omega_f(p) < p$ であることとは同値であり，[4]によると，すべての素数 p について $\omega_f(p) < p$ ならば $C(f) > 0$ である．

§1 k-th Fibonacci 数列 $\{f_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$ の導入

各整数 k について数列 $\{f_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$ を，

$$f_0^{(k)}=0\ ,\quad f_1^{(k)}=1$$
$$f_n^{(k)}=k\cdot f_{n-1}^{(k)}+f_{n-2}^{(k)}\qquad (n\geqq 2)$$

で定義する。この時，次の(1, 1), (1, 2), (1, 3)は容易に得られる。

(1, 1) $\quad (f_n^{(k)},\ f_{n+1}^{(k)})=1 \qquad (n\geqq 0)$

(1, 2) $\quad k\equiv 0\ (\mathrm{mod}.\,2) \Rightarrow f_n^{(k)}\equiv \begin{cases} 0\ (\mathrm{mod}.\,2) & (n\equiv 0\ (\mathrm{mod}.\,2)) \\ 1\ (\mathrm{mod}.\,2) & (n\equiv 1\ (\mathrm{mod}.\,2)) \end{cases}$

(1, 3) $\quad \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n=(-1)^n\begin{pmatrix} f_{n+1}^{(k)} & -f_n^{(k)} \\ -f_n^{(k)} & f_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix} \qquad (n\geqq 1)$

§2 正則連分数に関する一注意

一般に，$\theta=[0;\overset{*}{a}_1, a_2, \cdots, \overset{*}{a}_s]\quad (s\in\mathbb{N})$ とする時，

$$\begin{pmatrix} -a_s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a_{s-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\theta)=\theta$$

であり，上式の左辺の行列の積を $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とする時，θ は，

$$C\theta^2+(D-A)\theta-B=0$$

を満たす。もしもここで

$$2C\,|\,D-A \text{ かつ } C\,|\,B \text{ かつ } (D-A)/C\neq 0 \quad \cdots\cdots ☆_1$$

ならば，　$\theta=\sqrt{m_1}-m_2\quad(m_1\in M,\ m_2\in\mathbb{N})$ ．‥‥‥‥ ☆$_2$

さらに　$0<\theta<1$　を考慮すれば，条件☆$_1$たちのもとで，

$$\sqrt{m_1}=[[\sqrt{m_1}];\overset{*}{a}_1,a_2,\cdots,\overset{*}{a}_s]\ ,\ m_1\in M$$

を得る．（注．θは初めのとり方から無理数．）　ここに

$$m_1=((D-A)^2+4BC)/4C^2$$

である．

§3　多項式 $F_s(x)$ の構成

まず

$$(3,1)\qquad \theta=[0;\overset{*}{a}_1,a_2,\cdots,a_{s-1},\overset{*}{a}_s]$$
$$(a_1=a_2=\cdots=a_{s-1}=k\in\mathbb{N},\ s\geqq 2)$$

の型の正則連分数展開をもつ２次無理数を考える．

（注意：$[a;\overset{*}{k},k,\cdots,k,\overset{*}{2a}]$ 型の正則連分数展開をもつ２次無理数は，O. Perron あるいは L. Bernstein によって $\sqrt{r}\ (r\in\mathbb{Q})$ の形の数であることは既に得られており，さらにその数が $\sqrt{m}\ (m\in M)$ の形の数になる為の条件についても調べられているが，ここでは§0との関係において使い易い公式を得る為にも別の方法を用いる．）(cf. [5], [6])

§1, §2より (3, 1) の型の正則連分数展開をもつθは，方程式

$$(3,2)\qquad f_s^{(k)}\cdot\theta^2+f_s^{(k)}\cdot a_s\cdot\theta-(f_{s-1}^{(k)}\cdot a_s+f_{s-2}^{(k)})=0$$

の根であることは容易にわかる．そこで (3.2) を満たすθが上の☆$_2$の形の数になる為には§2で考えたように，

$$a_s \in \{ k + l f_s^{(k)} \mid l = 0, 1, 2, 3 \cdots \}$$

であることが必要条件として得られる．（∵ §2で条件☆₁のC|Bを方程式(3,2)に適用すればよい．）

そこで今 k を偶数とし $k = 2k'$ とおいて，

$$(3,3) \qquad a_s = 2(k' + l f_s^{(k)}) \qquad (l = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

とすれば，方程式(3,2)において§2の条件☆₁たちはすべて満たされる．すなわち(3,3)のもとで方程式(3,2)は，

$$(3,4) \qquad \theta^2 + 2(f_s^{(2k')} \cdot l + k') - (2 f_{s-1}^{(2k')} \cdot l + 1) = 0$$

に変形され，§2の終りに述べたことにより次の公式を得る．

（注．k' をあらためて k と書くことにする．）

$$(3,5) \qquad \left((f_s^{(2k)})^2 l^2 + 2(k \cdot f_s^{(2k)} + f_{s-1}^{(2k)}) l + k^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= [f_s^{(2k)} \cdot l + k ; \underbrace{\overset{*}{2k}, 2k, \cdots, 2k}_{s-1}, 2(f_s^{(2k)} \cdot l + k)^{*}]$$

$$(l = 0, 1, 2, \cdots ; k = 1, 2, 3, \cdots ; s = 2, 3, 4 \cdots)$$

（注．公式(3.5)では $s=1$ の場合が除かれているが，この時には，形式的に $k=0$ とおけば，$\sqrt{l^2+1} = [l ; \overset{*}{2l}]$ を得る！ただし $a_s > 0$ なる為に $l=0$ の場合は除かれなければならない．$s=1$ の場合の公式を得る為には，ただ単に(3,5)において $l=0$ とおくだけでもよい．）

そこで

$$(3,6) \qquad F_s^{(k)}(x) = (f_s^{(2k)})^2 x^2 + 2(k \cdot f_s^{(2k)} + f_{s-1}^{(2k)}) x + k^2 + 1$$

とおく．ただし (3.6) では，$s=1$ に対しては $k=0$ を，$s\neq1$ に対しては k は任意の自然数を考えるものとする．この時(3.5)及びその注意によって明らかなように，

$$F_s^{(k)}(\mathbb{N}) \subset M_s \quad (s=1,2,3,\cdots)$$

である．

二次多項式 $F_s^{(k)}(X)$ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D/4 &= \left(k\cdot f_s^{(2k)}+f_{s-1}^{(2k)}\right)^2-\left(f_s^{(2k)}\right)^2\cdot(k^2+1) \\ &= \left(2k\cdot f_s^{(2k)}+f_{s-1}^{(2k)}\right)\cdot f_{s-1}^{(2k)}-\left(f_s^{(2k)}\right)^2 \\ &= f_{s+1}^{(2k)}\cdot f_{s-1}^{(2k)}-\left(f_s^{(2k)}\right)^2 \\ &= \det.\left(\begin{pmatrix}-k & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^s\right) \qquad (\because (1,3)\text{ より}) \\ &= (-1)^s \end{aligned}$$

従って $F_s^{(k)}(X)$ は，各 $s\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ に対して既約である．

またたとえば $k=1$ とすると，各 $s=3,5,7,9,\cdots$ について $F_s^{(k)}(X)$ が強原始的であることは (1,2) より容易にわかる．また $s=1$ に対しては $F_1^{(0)}(X)=X^2+1$ を考えれば結局，各奇数 s について，最初に述べた既約かつ強原始的な二次の整係数多項式（勿論最高次の係数は正）$F_s(X)$ で

$$F_s(\mathbb{N}) \subset M_s$$

を満たすものが取れることがわかった．

文献

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of 'partitio numerorum'; III : On the expression of a number as a sum of primes, Acta. Math. 44 (1923), pp. 1～70

[2] P. T. Bateman and R. A. Horn, Primes represented by irreducible polynomials in one variable, Proc. of Symposia in pure Math. VIII (1965), pp119～132

[3] P. Chowla and S. Chowla, Problems on periodic simple continued fractions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 69, No. 12 (December 1972), p. 3745

[4] P. T. Bateman and R. A. Horn, A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers, Math. Comp. 16 (1962) pp. 363～367

[5] O. Perron, "Die Lehre von den Kettenbrüchen" Bd. I, Teubner

[6] L. Bernstein, Periodische Kettenbrüche beliebiger Periodenlänge, Math. Zeitschr. 86 (1964), pp. 128～135