数理解析研究所講究録
第 222 巻 1974 年 82-91

ϑ-Weyl 和

名大 中井喜信

Weyl 和と解析数論の方面で呼ばれているものは、$f(x)$ を実係数の多項式、$e(x)=e^{2\pi i x}$ とおく時、$\sum_{X<n\leq X+N} e(f(n))$ の形の有限和の事で、f の係数と次数に適当な条件を課して $N\to\infty$ とする時のこの和の挙動が主な関心の的となっている。今 $f(x)$ が 1 次式なら之は中級数であるから、まず十分にわかる。次に $f(x)$ が 2 次式なら、古くは Hardy と Littlewood により調べられ、[1] にも誤差 $O(N^{\frac{1}{2}})$ を許す事により、$f(x)$ の係数より生じる連分数展開を使うとまずまずの形に書ける事が示されている。いわゆる ϑ-級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\tau n^2}$ $(\mathrm{Im}\,\tau>0)$ とある意味で似たふるまいをするため、今 $Q(x)$ を実二次形式（今後に変数の个数を"l"とおこう），$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^l$ 内の閉凸多辺形で大きさ有限、辺の个数は $O(1)$ 个のものとして，γ は $\mathbb{R}^l$ 内のヴェクトルとし、$\sum_{m\in\mathcal{O}\cap\mathbb{Z}^l} e(\frac{1}{2}Q(m+\gamma))$ の形の"有限和"を、標題に言う（l 次元の）ϑ-Weyl 和と呼ぶ事にして、上の $l=1$

の場合に［１］で述べられているような形で、一般の ℓ の場合も扱いたい。ここでは、２変数でしかも［１］の Lemma 3 に相当する部分のみ述べる。証明は、初等的で退屈な計算になるため、大部分は述べない。誤差項は、log-factor 分だけ期待される形より悪い評価である。

§１． Poisson の和公式

今 $\phi(x)$ を連続でかつ $\phi'(x)$ も連続な $\mathbb{R}$ 上の函数として、$\langle x\rangle = \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & \cdots\ x\notin\mathbb{Z} \\ 0 & \cdots\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ ，及び $\langle x\rangle_0 = x-[x]-\frac{1}{2}$，（$[x]$ は Gauss の記号）とおく時、Euler-Maclaurin により

$$\sum_{a<n\leq b}\phi(n) = \int_a^b\left\{\phi(x)+\langle x\rangle\cdot\phi'(x)\right\}dx + \Big[-\langle \bar{x}\rangle_0\,\phi(\bar{x})\Big]_{\bar{x}=a}^{\bar{x}=b}$$

となる。今 $\langle x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}'\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\frac{1}{n}\cdot e(nx)$ と展開されているので、之に Euler-Maclaurin を使えば

$$\tilde{T}_N(x) \underset{\mathrm{df.}}{=} \operatorname{sgn}\tilde{x}\cdot\int_{|\tilde{x}|\cdot(N+1)}^{\infty}\frac{\sin 2\pi y}{\pi y}\,dy \quad \left(\text{但し }\begin{matrix}\tilde{x}\equiv x \bmod 1,\ |\tilde{x}|\leq\frac{1}{2}\\ \operatorname{sgn}0 \underset{\mathrm{df.}}{=} 0\end{matrix}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{1+(N+1)\cdot|\tilde{x}|}\right)$$

とおく時

$$\langle x\rangle = \sum_{-N\leq n\leq N,\ n\neq 0}'\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\cdot\frac{1}{n}e(nx) - \tilde{T}_N(x) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

となる。之により、

（Lemma 1） $f(x)$ は連続で $f'(x)$ も連続な $\mathbb{R}$ 上の函数とする時 $\sum\limits_{a\leq n\leq b}^{\sim}$ で $a\in\mathbb{Z}$ 又は $b\in\mathbb{Z}$ なら両端項は $\frac{1}{2}$ 倍する事とし

$$\sum_{a\le n\le b}^{\sim} f(n) = \sum_{|n|\le N}\int_a^b f(x)\cdot e(nx)\cdot dx \quad + \left[\tilde{T}_N(x)\cdot f(x)\right]_{x=a}^{x=b}$$

$$+\,O\Big(\frac{1}{N}\cdot\int_a^b |f'(x)|\cdot dx\Big) \quad + \Big[O\Big(\frac{1}{N}|f(x)|\Big)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

$$+\,O\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot\sup_x\sum_k |f'(x+k)|\Big)$$
$$0\le x\le 1,\ k\in\mathbb{Z},\ a\le x+k\le b$$

となる。$N\to\infty$ とすれば通常の Poisson和公式となる。

(Lemma 2) $F(\mathbf{x})$ を $\mathbb{R}^2$ 上の函数で F, F_1, F_2, F_{12} はすべて連続とし、$\mathfrak{D}$ は $\mathbb{R}^2$ 内の閉凸多辺形で ($\displaystyle\sum_{\mathbf{m}\in\mathfrak{D}\cap\mathbb{Z}^2} F(\mathbf{m})$ 等が収束するなら $\mathfrak{D}$ は有界でなくても可) あれば $\left\langle\binom{x_1}{x_2},\binom{y_1}{y_2}\right\rangle \underset{\mathrm{def.}}{=} x_1y_1+x_2y_2$ として

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathfrak{D}\cap\mathbb{Z}^2} F(\mathbf{m}) = \sum\sum_{\substack{\mathbf{m}=\binom{m_1}{m_2}\in\mathbb{Z}^2\\ \text{s.t.}\ |m_1|\le N_1,\ |m_2|\le N_2}} \iint_{\mathfrak{D}} e(\langle \mathbf{m},\mathbf{x}\rangle)\cdot F(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} \quad + o(1)$$

$$+ \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\partial\mathfrak{D}\cap\mathbb{Z}^2\\ \text{頂点でないもの}}} \frac{1}{2}F(\mathbf{m}) \qquad + \sum_{\mathbb{P}\,:\,\mathfrak{D}\text{の頂点}} \cdot\Big(\begin{array}{c}\text{下に述べる}\\ \text{weight をつけて}\end{array}\Big)\cdot F(\mathbb{P})$$

$$+ \left[\hat{T}_2(\bar{x}_2)\cdot\sum_{\hat{l}_1<m_1<\hat{l}_1'} F\binom{m_1}{\bar{x}_2}\right]_{\substack{\bar{x}_2=\boxed{l_2}\\ \text{下の辺}}}^{\substack{\bar{x}_2=\boxed{l_2'}\\ \text{上の辺}}} + \left[\hat{T}_1(\bar{x}_1)\cdot\sum_{\hat{l}_2<m_2<\hat{l}_2'} F\binom{\bar{x}_1}{m_2}\right]_{\substack{\bar{x}_1=\boxed{l_1}\\ \text{左の辺}}}^{\substack{\bar{x}_1=\boxed{l_1'}\\ \text{右の辺}}}$$

となる。ただし、$\hat{T}_i(x_i) \underset{\mathrm{def.}}{=} \tilde{T}_{N_i}(x_i)$ $(i=1,2)$ であり $\bar{x}_2=\boxed{l_2}$ 等の記号は $\mathfrak{D}$ の水平な辺上でのみ $\sum_{m_1}$ をとる事を示す。($\bar{x}_1=\boxed{l_1}$ は垂直辺上でのみ)。又 $o(1)$ は (Lemma 1) にある O-terms と同じように "explicit" な評価が出来るが、複雑なのでここには書かない。$\mathfrak{D}$ の頂点 $\mathbb{P}=\binom{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$ について、つけるべき weight は、$\mathbb{P}$ に接する辺の向きにより、場合分けとして、

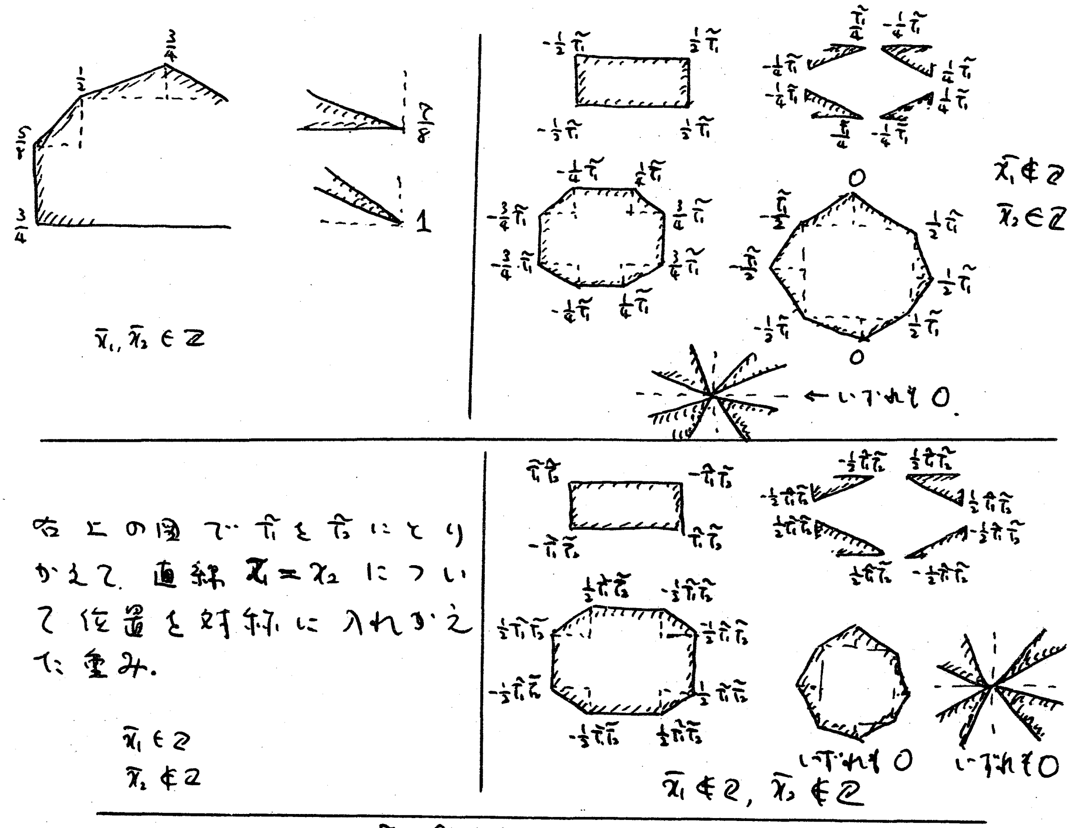

図1　$\tilde{\tau}_i = \tilde{\tau}_{w_i}(\tilde{x}_i)$　$i=1,2$

である。

§2。$\Psi_\varepsilon(y)$

今，$\varepsilon = \pm 1$，$y \geq 0$ として．$\Psi_\varepsilon(y) \underset{\mathrm{def}}{=} e(-\frac{\varepsilon}{2}y^2)\cdot\int_y^\infty e(\frac{\varepsilon}{2}t^2)\,dt$ とおく．之は parabolic cylinder 函数を一部とりかえたものであるが．特に $\Psi_\varepsilon(|y|)\cdot\mathrm{sgn}\,y = \frac{1}{2\pi i}e(-\frac{\varepsilon}{8})\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\cdot\{t - e(\frac{\varepsilon}{8})\cdot y\}^{-1}\,dt$ （$y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$）なる積分表示は便利である。又 $\mathrm{Re}\,\Psi_\varepsilon(y) = C(y)$，$\mathrm{Im}\,\Psi_\varepsilon(y) = \varepsilon\cdot S(y)$ とおけば $C(0) = S(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，$C(y)$ と $S(y)$ は各々 $y > 0$ で正値で $y \to \infty$ の時単調減少で $C(y) \approx (4\pi^2 y^3)^{-1}$，$S(y) \approx (2\pi y)^{-1}$ である．$C'(y)$ は負値で．$y \to \infty$

$\to\infty$ の時単調増大で $C'(y) \approx -\frac{3}{4\pi^2 y^4}$, $S'(y)$ は複雑であるが. $0 < y < \rho_2$ の時 単調減少, $\rho_2 < y < \infty$ の時単調増大で $S'(y) \approx -(2\pi y^2)^{-1}$ となる. (ここに $\rho_2 \doteqdot 1$ なる数).

(*Lemma* 3) $X_2 > X_1$, $\alpha \neq 0$ (実数), v_0 実数として.

$$\int_{X_1}^{X_2} e\left(\frac{1}{2\alpha}(x-v_0)^2\right)dx = \chi \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot e\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{8}\right)$$
$$- \operatorname{sgn}^*(X_2-v_0)\cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot e\left(\frac{1}{2\alpha}(X_2-v_0)^2\right)\cdot \Psi_{\varepsilon_\alpha}\left(\frac{|X_2-v_0|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$+ \operatorname{sgn}_*(X_1-v_0)\cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot e\left(\frac{1}{2\alpha}(X_1-v_0)^2\right)\cdot \Psi_{\varepsilon_\alpha}\left(\frac{|X_1-v_0|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}}\right)$$

となる。ただし $\varepsilon_\alpha = \operatorname{sgn}\alpha$, $\operatorname{sgn}^* x = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \cdots x \neq 0 \\ 1 & \cdots x = 0 \end{cases}$,

$\operatorname{sgn}_* x = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \cdots x \neq 0 \\ -1 & \cdots x = 0 \end{cases}$, $\chi = \begin{cases} 1 & \cdots X_1 \leq v_0 \leq X_2 \\ 0 & \cdots v_0 < X_1 \text{ 又は } X_2 < v_0 \end{cases}$ とおく。

(*Lemma* 4) $K > 0$, B:実数 , $\varepsilon = \pm 1$ とする時

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} y)\cdot \Psi_\varepsilon(K|y|)\cdot e(By)\,dy = (-i)\cdot \operatorname{sgn} B \cdot K^{-1}\cdot e\left(-\frac{\varepsilon}{8}\right)\cdot \Psi_{-\varepsilon}(K^{-1}\cdot |B|)$$

となる。但し $\operatorname{sgn} 0 \underset{\mathrm{def}}{=} 0$.

(*Lemma* 5) $\alpha \neq 0$ (実数), u:実数 , $\varepsilon = \pm 1$ として

$$J_\varepsilon\left(u;\frac{1}{\alpha}\right) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} y \cdot \Psi_\varepsilon(|y|)\cdot e\left(\frac{(y-u)^2}{2\alpha}\right)\cdot dy$$

は、$\alpha \neq \varepsilon$ の時

$$= \operatorname{sgn}(\varepsilon\varepsilon_\alpha\varepsilon'_\alpha u)\cdot \left|\varepsilon - \frac{1}{\alpha}\right|^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(e\left(\frac{\varepsilon}{8} + \frac{u^2}{2\alpha}\right)\cdot \Psi_{-\varepsilon\varepsilon'_\alpha}\left(\frac{|u|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}\cdot|\alpha-\varepsilon|^{\frac{1}{2}}}\right) - e\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{8}\right)\cdot \Psi_{-\varepsilon_\alpha\varepsilon'_\alpha}\left(\frac{|u|}{|\alpha-\varepsilon|^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

となる. ただし $\varepsilon_\alpha = \operatorname{sgn}\alpha$, $\varepsilon'_\alpha = \operatorname{sgn}(|\alpha| - \varepsilon\varepsilon_\alpha)$, $\operatorname{sgn} 0 \underset{\mathrm{def}}{=} 0$。また $\alpha = \varepsilon$ については $J_\varepsilon(u;\varepsilon) = e\left(-\frac{\varepsilon}{8}\right)\cdot\left\{e\left(\frac{\varepsilon}{2}u^2\right) - 1\right\}\cdot(2\pi u)^{-1}$.

(Lemma 6) $\alpha \neq 0$ (実数), u: 実数として

$$\int_{X_1}^{X_2} \operatorname{sgn} y \cdot \Psi_\varepsilon(|y|) \cdot e\left(\frac{(y-u)^2}{2\alpha}\right) \cdot dy = O\left(\min\left\{|\alpha|^{\frac{1}{2}},\ |X_2-X_1|,\ \log(2+|\alpha|)\right\}\right)$$

となる。

(Lemma 7) Lemma 5 の記号を使い、X_1, X_2, v_0 が互に異り又 0 でもない時、$|v_0| \asymp |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ かつ $|X_j - v_0| \asymp |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ ($j=1$ or 2 のいずれか) となる場合以外は、$X_2 > X_1$ の時

$$\int_{X_1}^{X_2} \operatorname{sgn} y \cdot \Psi_\varepsilon(|y|) \cdot e\left(\frac{(y-v_0)^2}{2\alpha}\right) \cdot dy$$

= (イ): X_1, X_2 同符号 かつ $X_1 - v_0$, $X_2 - v_0$ 同符号 の時

: $\displaystyle\sum_{j=1,2} O\left(|\alpha|^{\frac{1}{2}} \left| \Psi(|X_j|) \cdot \Psi\left(\frac{|X_j - v_0|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}}\right)\right|\right)$

(ロ) X_1, X_2 同符号 かつ $X_1 - v_0$, $X_2 - v_0$ 異符号 の時

: $\displaystyle\operatorname{sgn} v_0 \cdot e\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot \Psi_\varepsilon(|v_0|) + \sum_{j=1,2} O($(イ)と同じ形$)$

(ハ) X_1, X_2 異符号 かつ $X_1 - v_0$, $X_2 - v_0$ 同符号の時

: $\displaystyle J_\varepsilon\left(v_0; \frac{1}{\alpha}\right) - \operatorname{sgn} v_0 \cdot e\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot \Psi_\varepsilon(|v_0|) + \sum_{j=1,2} O($(イ)と同じ形$)$

(ニ) X_1, X_2 異符号 かつ $X_1 - v_0$, $X_2 - v_0$ 異符号 の時

: $\displaystyle J_\varepsilon\left(v_0; \frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{j=1,2} O($(イ)と同じ形$)$

となる。

§3. 2変数の場合.

今 実行列 $A \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \\ & \delta_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \right]$ $\quad$ $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ Siegel の記号

について、 $1 \gg |\delta_1|, |\delta_2| > 0$ を仮定し、実二次形式 $Q(x)$ $\underset{\text{def}}{\equiv} A[x]$ を用意する。又、$\mathbb{R}^2$ 内の有限閉凸多辺形 $\mathcal{D}$ を用意して、$\mathcal{D}$ は辺の個数 $O(1)$ で、$\mathcal{D}$ の各辺の傾きは x_1-軸の正方向からはかって ρ とする時、すべての辺について $Q\left(\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right) \neq 0$ となる事を仮定する。

(Lemma 8). $r, y \in \mathbb{R}^2$ について

$$\left|\iint_{\mathcal{D}} e\left(\tfrac{1}{2}Q(x+r) - \langle x, y\rangle\right) dx\right| \ll |\delta_1\delta_2|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\text{辺}} \log(2+|q|)$$

となる。但し $q = \dfrac{\delta_1 \cos^2(\theta-\rho)}{Q\left(\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right)}$.

二次形式 $Q(x)$ と、多辺形 $\mathcal{D}$ との関係を更に制限して、すべての辺について $\left|Q\left(\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right)\right| \geq c\cdot|\delta_2 \sin^2(\theta-\rho)|$ 、かつ $Q\left(\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right) \neq 0$ 、かつ、もし $\theta-\rho \not\equiv 0 \bmod \pi$ ならば $|(\theta-\rho) \bmod \pi| \geq c$ となる事を仮定する。ここに c は適当な正定数である。初の条件は、$Q\left(\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right) = \delta_1\cos^2(\theta-\rho) + \delta_2\sin^2(\theta-\rho)$ である事により、どれかの辺について、$\delta_1\delta_2 < 0$ かつ $|\delta_1\cos^2(\theta-\rho)| \fallingdotseq |\delta_2\sin^2(\theta-\rho)|$ となる事はない事を意味する。最後の条件は、次の Proposition を適用する際に、$\mathcal{D}$ の適当な三角形分割を行ったあとに、x_1-, x_2-座標の入れかえを考えれば満される。

記号を用意する。$L_1 \underset{\text{def}}{\equiv} \alpha\cos\rho + \beta\sin\rho$, $L_2 \underset{\text{def}}{\equiv} \beta\cos\rho + \gamma\sin\rho$, $R \underset{\text{def}}{\equiv} Q\left(\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right) = \delta_1\cos^2(\theta-\rho) + \delta_2\sin^2(\theta-\rho) = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{vmatrix}$, $\varepsilon_R \underset{\text{def}}{\equiv} \operatorname{sgn} R$, $q = R^{-1}\cdot\delta_1\cos^2(\theta-\rho)$, とおく。又、次の Proposition 中の各辺につ

いて $\mathbb{P}$ はその辺の頂点とする（いずれでも可）。又 $\gamma \in \mathbb{R}^2$ に対し $\mathbb{K} \underset{\mathrm{def}}{=} A\times(\mathbb{P}+\gamma)$ とおく。又、$\varepsilon_i = \mathrm{sgn}\,\delta_i$ $(i=1,2)$ とおく。更に M_1, M_2 を Lemma 2 の N_1, N_2 の如く、上記諸変数に応じて十分大きくとるべきものとし、$\log^*$ で、いわゆる log-factor を表わす事にすれば、上の諸仮定のもとに

(Proposition 1) $\displaystyle\sum_{m\in\mathcal{D}} e\left(\tfrac{1}{2}Q(m+\gamma)\right) =$

$$= \sum_{m\in\partial\mathcal{D}} \frac{1}{2}\cdot e\left(\tfrac{1}{2}Q(m+\gamma)\right) + \sum_{m\in A\times(\mathcal{D}+\gamma)} |\delta_1\delta_2|^{-\frac{1}{2}}\cdot e\left(\tfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{8}\right)\cdot e\left(-\tfrac{1}{2}A^{-1}[m]+\langle m,\gamma\rangle\right)$$

$$+ \left[\tilde{T}_1(\tilde{x}_1)\cdot\sum_{m_2}{}' e\left(\tfrac{1}{2}Q\begin{pmatrix}\tilde{x}_1+\gamma_1\\ m_2+\gamma_2\end{pmatrix}\right)\right]_{\tilde{x}_1=\boxed{\ell_1}}^{\tilde{x}_1=\boxed{\ell_1'}} + \left[\tilde{T}_2(\tilde{x}_2)\cdot\sum_{m_1}{}' e\left(\tfrac{1}{2}Q\begin{pmatrix}m_1+\gamma_1\\ \tilde{x}_2+\gamma_2\end{pmatrix}\right)\right]_{\tilde{x}_2=\boxed{\ell_2}}^{\tilde{x}_2=\boxed{\ell_2'}}$$

(垂直な辺上でのみ)　(M_1について)　　　(水平な辺上でのみ)　(M_2について)

$$+ O\left(|\delta_1\delta_2|^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{\mathcal{D}\text{の辺}}\log(2+|\gamma|)\cdot\log(2+M_1)\log(2+M_2)\right)$$

①$\cdots$ $\displaystyle + \sum_{m\in\mathbb{Z}^2\cap(A\cdot(\mathcal{D}+\gamma)\text{の水平辺上})} \begin{pmatrix}-:\text{上の辺}\\ +:\text{下の辺}\end{pmatrix}\times\widetilde{\mathrm{sgn}}\left(\varepsilon_2\cdot\left\langle\begin{pmatrix}-s\\ c\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right)\cdot|\delta_1\delta_2|^{-\frac{1}{2}}\cdot e\left(\tfrac{\varepsilon_1}{8}\right)\cdot e\left(\tfrac{-1}{2\delta_1}\left\{\left\langle\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right\}^2 - \langle m,\mathbb{P}\rangle + \tfrac{1}{2}Q(\mathbb{P}+\gamma)\right)\times\Psi_{\varepsilon_2}\left(|\delta_2|^{-\frac{1}{2}}\left|\left\langle\begin{pmatrix}-s\\ c\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right|\right)$

②$\cdots$ $\displaystyle + \sum_{m\in\mathbb{Z}^2\cap(A\cdot(\mathcal{D}+\gamma)\text{の垂直辺上})} \begin{pmatrix}+:\text{右辺}\\ -:\text{左辺}\end{pmatrix}\times\widetilde{\mathrm{sgn}}\left(-\varepsilon_1\cdot\left\langle\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right)\cdot|\delta_1\delta_2|^{-\frac{1}{2}}\cdot e\left(\tfrac{\varepsilon_2}{8}\right)\cdot e\left(\tfrac{-1}{2\delta_2}\cdot\left\{\left\langle\begin{pmatrix}-s\\ c\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right\}^2 - \langle m,\mathbb{P}\rangle + \tfrac{1}{2}Q(\mathbb{P}+\gamma)\right)\times\Psi_{\varepsilon_1}\left(|\delta_1|^{-\frac{1}{2}}\left|\left\langle\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right|\right)$

③$\cdots$ $\displaystyle + \sum_{A\cdot(\mathcal{D}+\gamma)\text{の水平でも垂直でもない辺上で}} \begin{pmatrix}-:\text{上の辺}\\ +:\text{下の辺}\end{pmatrix}\times \sum_{m\ \text{s.t.}\ \left\{\begin{smallmatrix}|m_1|\le M_1\\ |m_2|\le M_2\end{smallmatrix}\right\}} e\left(-\tfrac{1}{2R}\left\{\left\langle\begin{pmatrix}\cos\rho\\ \sin\rho\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right\}^2 - \langle m,\mathbb{P}\rangle + \tfrac{1}{2}Q(\mathbb{P}+\gamma)\right)\times$

で二行あとの条件にあてはまるもののみ.

$$\times |\delta_1\delta_2|^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{sgn}(\tan(\theta-\rho))\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left\langle\begin{pmatrix}\cos\rho\\ \sin\rho\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}_j\right\rangle \text{ が } j=1,2 \text{ で異符号なら}\\ \qquad : -\mathrm{sgn}\left(\varepsilon_1\varepsilon_R\cdot\sin(\theta-\rho)\cdot\left\langle\begin{pmatrix}-L_2\\ L_1\end{pmatrix}, m-\mathbb{K}\right\rangle\right)\cdot e\left(\tfrac{\varepsilon_R}{8}\right)\cdot\left|\dfrac{\delta_2\sin^2(\theta-\rho)}{R}\right|^{\frac{1}{2}}\times\end{array}\right\}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad \times \Psi_{\varepsilon_1}\left(\left|\frac{\sin(\theta-\varphi)}{R\cdot|\delta_1|^{\frac12}}\right| \cdot \left|\left\langle \binom{-L_2}{L_1},\ m-K \right\rangle\right| \right) \\
&+ \left\langle \binom{C}{S},\ m-K_j \right\rangle \text{ が } j=1,2 \text{ で異符号なら} \\
&\quad : \left(\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}\left(\varepsilon_1\varepsilon_R\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot\left\langle \binom{-L_2}{L_1},\ m-K \right\rangle\right)\cdot e\left(\frac{\varepsilon_R}{8}\right)\cdot\left|\frac{\delta_2\sin^2(\theta-\varphi)}{R}\right|^{\frac12} \times \\
&\qquad \times \Psi_{\varepsilon_1}\left(\left|\frac{\sin(\theta-\varphi)}{R\cdot|\delta_1|^{\frac12}}\right| \cdot \left|\left\langle \binom{-L_2}{L_1},\ m-K \right\rangle\right| \right) \\
&- \operatorname{sgn}\left(\varepsilon_1\varepsilon_2\sin(\theta-\varphi)\cdot\left\langle \binom{-L_2}{L_1},\ m-K \right\rangle\right)\cdot e\left(\frac{\varepsilon_R}{8}\right) \times \\
&\qquad \times \Psi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_R}\left(|\delta_1\delta_2 R|^{-\frac12}\cdot\left|\left\langle \binom{-L_2}{L_1},\ m-K \right\rangle\right| \right)
\end{aligned} \right)
\end{aligned}
\right\}
$$

となる。ただし、$\overline{\Sigma} = \boxed{\Sigma}$ 等は Lemma 2 の如く、$\mathfrak{D}$ の水平又は垂直な辺上でのみ扱う事を意味する。又、$\operatorname{sgn} x$ は、その左にある ± の辺のとり方に応じて $\operatorname{sgn}^* x$ 又は $\operatorname{sgn}_* x$ をとる事を示す。又、括弧の中の K_j は、所定の辺の両頂点を P_1, P_2 としてそれに応ずる K を示す。右辺の第一行目の末尾の和が、第一主項である。

これではわかりにくいので、今、N を $\mathfrak{D}$ の直径とすれば、各和に番号①,②,③をつけて、

(Proposition 2) $\displaystyle\sum_{m\in\mathfrak{D}} e\left(\frac12 Q(m+\gamma)\right) =$

$$
= \sum_{m\in A^*(\mathfrak{D}+\gamma)} |\delta_1\delta_2|^{-\frac12}\, e\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{8}\right)\cdot e\left(-\frac12 A^{-1}[m] + \langle m,\gamma\rangle\right)
$$

$$
+\ O(1) \quad +\ O\left(|\delta_1\delta_2|^{-\frac12} \sum_{\text{辺}} \log^* \cdot \log(2+|\ell|)\right) \quad +\ O(N\cdot \log^*)
$$

①′,②′……+ ①,②:(Proposition 1 のまま)

③′……+ ③:(Proposition 1 における m に更に $\left|\left\langle \binom{-L_2}{L_1},\ m-K \right\rangle\right| \le |L_1|+|L_2|$ なる制限をつける)

と表わされ、更に①′, ②′, ③′ 中の m の个数は $O(N+1)$ 个である。

2変数の ϑ-Weyl 和は、複雑ではあるが、一応まとまった形になった。Proposition 1 の右辺の各和には §2 から期待される反転公式もあるが、これ以上は眼の毒になりかねないので今回は書かない。又、他の場合の扱いも今回は書かない。

文献　[1] Y.-N. Nakai, "On a ϑ-Weyl sum", Nagoya Math. J., Vol.52, 1973, 163/172.