数理解析研究所講究録
第223巻 1974年 42-53

無限分解可能な分布の特性関数の積分可能性

慶応大 工学部 河田龍夫

本研究は，慶応大，工，前島信氏との共同によるものである。なお，シンポジュームの際に述べた結果はその後改良されたので，本稿には，この新しい結果を書くことにする。

1. 緒言. $F(x)$ を無限分解可能な分布関数とし，その特性関数を $f(t)$ とする。$f(t)$ の Lévy の公式から

$$\log f(t) = it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0-}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) + \int_{0+}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u). \tag{1}$$

こゝに $\log$ は主値分枝をとることとし，γ は実数，σ は非負

なお，$M(u)$, $N(u)$ は，それぞれ $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ で非減少関数で，$\varepsilon > 0$ に対し

$$\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2 dM(u) < \infty, \quad \int_{0+}^{\varepsilon} u^2 dN(u) < \infty, \tag{2}$$

かつ

$$M(-\infty) = N(\infty) = 0 \tag{3}$$

とする．（Gnedenko and Kolmogorov [1], Lukacs [2] 参照）

$f(t) \in L^p(-\infty,\infty)$, $p>0$ なるための条件について考える．特に $p=2$ のときは，$F(x)$ は $L^r(-\infty,\infty)$, $1 \leqq r \leqq 2$ に属する確率密度をもつ条件となる．

2. 定理． $\sigma \neq 0$ のときは，明らかに $f(t) \in L^p(-\infty,\infty)$ がすべての $p>0$ で成立するので，$\sigma=0$ の場合，すなわち正規因子を，$F(x)$ がもたない場合だけを考える．

いま

$$L(u) = -M(-u) + N(u), \qquad 0<u<\infty \tag{4}$$

とおく．$L(u)$ は非減少で，$L(u) \leqq 0$ $(0<u<\infty)$, $L(\infty)=0$ で，$\varepsilon>0$ に対し $\int_{0+}^{\varepsilon} u^2 \, dL(u) < \infty$ である．

われわれは次の定理を示す．

定理． $p>0$. $\sigma=0$ とし，ある $\delta>0$ に対し，$L(u)$ が $(0,\delta)$ で凹とする．

そうすると次の不等式が成立する．

$$A \int_{4/\delta}^{\infty} \exp\left[pL\left(\tfrac{1}{u}\right) - J(u)\right] du \leqq \int_0^{\infty} |f(t)|^p \, dt \leqq B \int_0^{\infty} \exp\left[pL\left(\tfrac{1}{u}\right)\right] du. \tag{5}$$

ここに A, B は

$$A = \pi \exp\left[pL(\delta) + 2\pi p L\left(\tfrac{\delta}{2}\right)\right], \quad B = \pi \exp\left[-3pL(\delta)\right]. \tag{6}$$

なお $J(u)$ は次の不等式を満足させる関数である:

$$\frac{\pi^2}{2}\cdot u^2\int_0^{1/(2u)} v^2\,dL(v) \leqq J(u) \leqq \frac{\pi^2}{2}u^2\int_0^{3/(2u)} v^2\,dL(v), \qquad (7)$$

$(0<u<\infty)$.

注意 1

ある $\delta>0$ に対して $(0,\delta)$ で $L(u)$ が凹であることを仮定すれば 勿論 このとき, $L(u)$ は $(0,\delta)$ で絶対連続となる.

注意 2. (6) より明らかなように, もし $L(u)$ が $(0,\infty)$ で凹のときは, $A=B=\pi$ となり, また (5)の左辺の積分の積分範囲は $(0,\infty)$ としてよい.

系. (i) $\sigma=0$ とし, $L(u)$ がある $\delta>0$ に対して, $(0,\delta)$ で凹であって, $\exp(L(1/u))\in L^p(0,\infty)$, $p>0$ ならば, $f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$ である.

(ii) $L(u)$ を $(0,\infty)$ で絶対連続とし, ある $\delta>0$ に対し, $(0,\delta)$ で凹であって, $u^2\int_0^{1/u} v^2\,dL(v)$ が有界ならば, $f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$ は $\exp(L(1/u))\in L^p(0,\infty)$ なることを含む. $p>0$.

$|f(t)|$ が偶関数であるから $f(t)\in L^p(0,\infty)$ と $f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$ は同じである.

3. 定理の証明.

次の補題を述べておくと便利である.

<u>補題</u>. Lévy の<u>表現</u> (1) で

$$\lim_{u \to 0+} u^2 L(u) = 0. \tag{8}$$

<u>証明</u>. $0 < \eta < \xi$ を任意の正数とすると

$$\int_{\eta}^{\xi} u^2 dL(u) \geqq \eta^2 [L(\xi) - L(\eta)].$$

$\eta \to 0+$ として (2) より

$$0 \leqq \limsup_{\eta \to 0+} [-\eta^2 L(\eta)] \leqq \int_{0+}^{\xi} u^2 dL(u).$$

ξ が任意であるから (8) が得られる.

<u>定理の証明</u>. (5) の右辺の不等式を証明する. $p > 0$ とする. 任意の $t > 0$ に対し

$$\int_0^t |f(u)|^p du = \int_0^t \exp[-p \int_0^{\infty} (1 - \cos ux) dL(x)] du. \tag{9}$$

$\delta > 0$ を定du で与えられた数とする.

$$I(u) = -p \int_0^{\delta} (1 - \cos ux) dL(x) \tag{10}$$

とおくと, 明らかに

$$\int_0^t |f(u)|^p du \leqq \int_0^t \exp I(u)\, du. \tag{11}$$

さて

$$I(u) = -2p \int_0^{\delta} \sin^2 \frac{ux}{2} dL(x),$$

部分積分により, 補題を用いて,

$$= -2p\sin^2\frac{\delta u}{2}L(\delta) + pu\int_0^{\delta}\sin ux\, L(x)\,dx \qquad (12)$$

$$\leqq -2pL(\delta) + pu\sum_{k=0}^{N-1}\int_{2k\pi/u}^{2(k+1)\pi/u}\sin ux\, L(x)\,dx$$

$$+\, pu\int_{2N\pi/u}^{\delta}\sin ux\, L(x)\,dx.$$

$$\equiv -2pL(\delta) + I_1(u) + I_2(u).$$

ここに $N=[\delta u/(2\pi)]$. $N=0$ のときは (12) の第2項 $I_1(u)$ は0と考える. また

$$\delta u/(2\pi) - 1 < N \leqq \delta u/(2\pi). \qquad (13)$$

$I_1(u)$ を計算する:

$$I_1(u) = p\sum_{k=0}^{N-1}\Big[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi}\Big]\sin y\cdot L\Big(\frac{y}{u}\Big)dy$$

$$= p\sum_{k=0}^{N-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin y\Big[L\Big(\frac{y}{u}\Big) - L\Big(\frac{y+\pi}{u}\Big)\Big]dy, \qquad (14)$$

L の $(0,\delta)$ における凹性を用いて,

$$\leqq p\sum_{k=0}^{N-1}\Big[L\Big(\frac{(2k+1)\pi}{u}\Big) - L\Big(\frac{2(k+1)\pi}{u}\Big)\Big]\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin y\,dy \qquad (15)$$

$$= p\sum_{k=0}^{N-1} 2\Big[L\Big(\frac{(2k+1)\pi}{u}\Big) - L\Big(\frac{2(k+1)\pi}{u}\Big)\Big]$$

$$\leqq p\sum_{k=0}^{N-1}\Big\{\Big[L\Big(\frac{(2k+1)\pi}{u}\Big) - L\Big(\frac{2(k+1)\pi}{u}\Big)\Big] + \Big[L\Big(\frac{2(k+1)\pi}{u}\Big) - L\Big(\frac{(2k+3)\pi}{u}\Big)\Big]$$

$$= p\Big[L\Big(\frac{\pi}{u}\Big) - L\Big(\frac{(2N+1)\pi}{u}\Big)\Big]. \qquad (16)$$

次に $I_2(u)$ の評価を求める.

もし $2N\pi/u < \delta \leqq (2N+1)\pi/u$ ならば

$$I_2(u) \leqq 0 \leqq p\left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L(\delta)\right] \qquad (17)$$

また $(2N+1)\pi/u < \delta \leqq (2N+2)\pi/u$ ならば

$$I_2(u) \leqq p\int_{2N\pi}^{(2N+2)\pi} \sin y\, L\left(\frac{y}{u}\right) dy$$

$$= p\int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} \sin y\left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right)\right] dy$$

$$\leqq 2p\left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2N+2)\pi}{u}\right)\right]$$

$$\leqq 2p\left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L(\delta)\right].$$

よって

$$I_2(u) \leqq p\left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L(\delta)\right]. \qquad (18)$$

よって δ の如何にかかわらず (18) の不等式が得られる.

(16), (18) により,

$$I(u) \leqq -3pL(\delta) + pL\left(\frac{\pi}{u}\right).$$

これを (11) へ入れ, $t\to\infty$ として (5) の右側の不等式が得られる。

次に (5) の左側の不等式を証明する. $u \geqq 4\pi/\delta$ とする。

$$-p\int_0^\infty (1-\cos ux)\, dL(x) = -p\int_0^\delta - p\int_\delta^\infty$$

$$\geqq I(u) + 2pL(\delta) \qquad (19)$$

(12) で, $-2p\sin^2(\delta u/2)L(\delta) \geqq 0$ であるから

$$I(u) \geqq pu\int_0^\delta \sin ux\, L(x)\, dx$$

$$= I_1(u) + I_2(u). \tag{20}$$

$I_1(u)$, $I_2(u)$ は前出のものである。

$$I_1(u) = p\int_0^{\pi} \sin y\left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right)\right]dy$$
$$+ p\sum_{k=1}^{N-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin y\left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right)\right]dy$$
$$= I_{11}(u) + I_{12}(u) \tag{21}$$

とおく。$L(x)$ の $(0,\delta)$ における凹性を用い、(14), (15) と同様の方法で次の不等式関係が得られる。

$$I_{12}(u) \geqq 2p\sum_{k=1}^{N-1}\left[L\left(\frac{2k\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2k+1)\pi}{u}\right)\right]$$
$$\geqq p\sum_{k=1}^{N-1}\left\{\left[L\left(\frac{(2k-1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{2k\pi}{u}\right)\right] + \left[L\left(\frac{2k\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2k+1)\pi}{u}\right)\right]\right\}$$
$$= p\left[L\left(\frac{\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2N-1)\pi}{u}\right)\right], \tag{22}$$

(13) より $(2N-1)\pi/u < \delta$ であるから

$$\geqq pL\left(\frac{\pi}{u}\right) - pL(\delta). \tag{23}$$

次に

$$I_{11}(u) = p\int_0^{\pi/2} \sin y\left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right)\right]dy$$
$$+ p\int_0^{\pi/2} \sin y\left[L\left(\frac{\pi-y}{u}\right) - L\left(\frac{2\pi-y}{u}\right)\right]dy$$
$$\geqq 2p\int_0^{\pi/2} \sin y\left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right)\right]dy$$
$$\geqq 2p\int_0^{\pi/2} y\left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right)\right]dy. \tag{24}$$

こゝで

$$J_1(u) = \left| \int_0^{\pi/2} y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy \right| \tag{26}$$

とおくと

$$\begin{aligned} J_1(u) &= u^2 \int_0^{\pi/(2u)} x\,dx \int_x^{x+\pi/u} dL(v) \\ &= u^2 \int_0^{\pi/(2u)} dL(v) \int_0^{v} x\,dx + u^2 \int_{\pi/(2u)}^{\pi/u} dL(v) \int_0^{\pi/(2u)} x\,dx \\ &\qquad + u^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/(2u)} dL(v) \int_{v-\pi/u}^{\pi/(2u)} x\,dx \qquad (27) \\ &\leqq \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2\,dL(v) + u^2 \int_{\pi/(2u)}^{3\pi/(2u)} dL(v) \int_0^{\pi/(2u)} x\,dx \\ &= \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2\,dL(v) + \frac{\pi^2}{8} \int_{\pi/(2u)}^{3\pi/(2u)} dL(v) \\ &\leqq \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2\,dL(v) + \frac{u^2}{2} \int_{\pi/(2u)}^{3\pi/(2u)} v^2\,dL(v) \\ &= \frac{u^2}{2} \int_0^{3\pi/(2u)} v^2\,dL(v). \end{aligned}$$

また (27) で、第1項だけを残して

$$J_1(u) \geqq \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2\,dL(v) \quad .$$

よって、

$$\frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2\,dL(v) \leqq J_1(u) \leqq \frac{u^2}{2} \int_0^{3\pi/(2u)} v^2\,dL(v) \tag{28}$$

したがって (21), (23), (24), (26) より

$$I_1(u) \geqq pL\left(\frac{\pi}{u}\right) - pL(\delta) - 2pJ_1(u) \qquad (29)$$

最後に

$$I_2(u) = pu\int_{2N\pi/u}^{\delta} \sin ux\, L(x)\,dx \geqq pu\int_{\delta-2\pi/u}^{\delta} L(x)\,dx$$

$$\geqq pu\cdot\frac{2\pi}{u}\cdot L(\delta-2\pi/u)$$

$u \geqq 4\pi/\delta$ であるから

$$I_2(u) \geqq 2\pi p L(\delta/2). \qquad (30)$$

結局 (29), (30) を (20) へ代入し、それを (19) へ入れると (10) より

$$\int_0^\infty |f(u)|^p du \geqq \int_{4\pi/\delta}^\infty |f(u)|^p du$$

$$\geqq \exp\left[pL(\delta)+2\pi pL\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]\int_{4\pi/\delta}^\infty \exp\left[pL\left(\frac{\pi}{u}\right)-J_1(u)\right]du.$$

$u=\pi u'$ と変数変換し、$J_1(\pi u')=J(u')$ とおくと (5) の左側の不等式が得られる.

4. 注意 いくつかの注意をのべる.

(i) (5)の右側の不等式が成立するためには、$L(u)$ の Lebesgue 分解で、その絶対連続部分 $L_{ac}(u)$ が、ある $\delta>0$ に対し $(0,\delta)$ で凹であるという仮定でよい、しかし(5)の右の不等式で L を L_{ac} でおきかえてよい。

すなわち、ある $\delta>0$ に対して $L_{ac}(u)$ が $(0,\delta)$ で凹でかつ $\exp L_{ac}\left(\frac{1}{u}\right) \in L^p(0,\infty)$, $p>0$ ならば $f(t) \in L^p(-\infty,\infty)$

で，$F(x)$ は絶対連続である．（確率密度をもつ）．

$F(x)$ の絶対連続性は，$\exp[\psi L_{ac}(1/u)]$ の可積分性より，$L_{ac}(0+)=\infty$ が得られ，これより明らか．（Tucker [3]）

（または Lukacs [2] p.125, Theorem 5.5.6，この定理で (ii) は $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, d\theta_{ac}(x) = \infty$ が正しい．（右辺が 0 となっていて，これは間違いである）

(ii) 系の条件 $u^2 \int_0^{1/u} v^2 dL(v)$ の有界性についてのべておく．

a を $0<a<1$ なる任意の定数とするとき

$$\frac{L(ax)}{L(x)} \to 1, \qquad x \to 0+ \tag{30}$$

を満たすとする．（すなわち原点の近傍で slow growth の関数であるとする）

いま

$$\frac{L(ax)}{L(x)} = 1+\delta(x), \qquad \delta(x)=\delta_a(x) \tag{31}$$

とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\int_0^{\varepsilon} v^2 dL(v) = \int_0^{\varepsilon/2} v^2 dL(v) + \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} v^2 dL(v), \tag{32}$$

とし，右辺の第1項に部分積分を用い，

$$v^2 L(v)\Big|_0^{\varepsilon/2} - 2\int_0^{\varepsilon/2} v L(v)\, dv.$$

補題を用いて

$$= \frac{1}{4}\varepsilon^2 L(\varepsilon/2) - 2\int_0^{\varepsilon/2} v L(v)\,dv = \frac{1}{4}\varepsilon^2 L(\varepsilon/2) - \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} u L(u/2)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon^2 L(\varepsilon)[1+\delta(\varepsilon)] - \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} u L(u)[1+\delta(u)]\,du$$

((31) を $a=1/2$ として用いた)

$$= \frac{1}{4}\left[\varepsilon^2 L(\varepsilon) - 2\int_0^{\varepsilon} u L(u)\,du\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\varepsilon^2 L(\varepsilon)\delta(\varepsilon) - \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} u L(u)\,\delta(u)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\varepsilon} v^2 dL(v) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 L(\varepsilon)\,\delta(\varepsilon) - \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} u L(u)\,\delta(u)\,du \tag{33}$$

また (32) の右辺の第2項は

$$\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} v^2 dL(v) \leqq \varepsilon^2 [L(\varepsilon) - L(\varepsilon/2)]$$

((31) を用いて)

$$= -\varepsilon^2 L(\varepsilon)\,\delta(\varepsilon).$$

これと (33) を (32) へ入れて

$$\frac{3}{4}\int_0^{\varepsilon} v^2 dL(v) \leqq -\frac{3}{4}\varepsilon^2 L(\varepsilon)\delta(\varepsilon) - \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} u L(u)\delta(u)\,du \tag{34}$$

すなわち

$$u^2\int_0^{1/u} v^2 dL(v) \leqq -L(1/u)\,\delta(1/u) - \frac{2}{3}u^2\int_0^{1/u} v L(v)\,\delta(v)\,dv \tag{35}$$

これより次の結果が得られる.

(31) において $\delta(x) = O(-L^{-1}(x))$, $x \to 0+$ ならば

$u^2\int_0^{1/u} v^2 dL(v)$ は $u\to\infty$ のとき有界である．よってこの場合次のように述べることができる．$L(x)$ の凹性は仮定する．

$f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$, $p>0$ なるための必要十分条件は $\exp[L(1/u)]\in L^p(0,\infty)$ なることである．

$\delta(x)=O(-L^{-1}(x))$ は例えば $L(x)=c\log^\beta x$, $0<\beta\leq 1$ ならば満足される．

なお(35)から次のことも得られる．

もし $L(x)$ が原点の近傍で slow growth の関数であれば，

$$u^2\int_0^{1/u} v^2 dL(v) = o(-L(1/u)),\quad u\to\infty.$$

よって次の事実も得られる．$L(x)$ の凹性は仮定する．

もし $f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$ かつ，$L(x)$ が原点の近傍で slow growth のものであれば，$\exp[L(1/u)]\in L^{p'}(0,\infty)$ である．ここに p' は任意の $p'<p$ なる正数である．

文献

[1] B.V. Gnedenko – A.N. Kolmogorov, (1954). Limit distributions for sums of independent random variables, (英訳, K.L. Chung) Cambridge, Mass.

[2]. E. Lukacs, (1970). Characteristic functions, (2nd ed.) London

[3] H. G. Tucker (1962), Absolute continuity of infinitely divisible distributions, Pacific J. math, 12, 1125-1129.