数理解析研究所講究録
第223巻 1974年 99-113

指数性の検定，分布型の検定

日本アイ・ビー・エム　渋谷政昭

1. まえがき

「確率分布の特徴づけ」の研究では，個々の分布の個性を汲み尽くそうとするが，本報告ではこれに反して，諸分布型を単一の規準に従って比較するという「管理社会型接近」について述べる。この比較では，個々の確率分布ではなく分布型を，その裾の軽さ（重さ）によって比べる。

分布型を比較しようとすると，まず「分布範囲または支持域（support）が異なるものをどう扱うか」，という問題が生じる。実数軸全体の上の分布と，正の部分の上の分布とを比較することはあまり意味がないであろう。連続な分布と離散的な分布とをいっしょに扱うかどうかは議論の分かれるところで，いっしょに扱いたいが扱い難い，のが実情であろう。離散的な分布も，たとえば自然数上の分布では「分布型とは何か」，ということも問題となる。

ここでは支持域が（0, ∞）に含まれる分布の族だけを取り上げ，分布型の検定問題を目標として議論する。（−∞, ∞）上の，既知の点に関して対称な分布の族も，ここの議論で扱うことができる。

2. 分布の裾の比較

分布関数 $G(y)$ をもつ確率変数 Y を規準として，それよりも裾の短い分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数 X を定義する。次の制限をおいておく。

(A) $F(0)=G(0)=0$; $F(x), G(y)$ は連続 ;

$G(y)>0, \quad y>0.$

また必要に応じて，X, Y は確率密度 $f(x)$, $g(y)$ をもつものとする。

<u>定義 1</u>

(1) $X \prec Y \ (\mathcal{T}_4)$

$$\frac{d}{du} f(F^{-1}(u)) \Big/ \frac{d}{du} g(G^{-1}(u)) \ , \quad 0<u<1,$$

が存在して非減少。ただし分母の導関数は連続であり，

$$\lim_{u\to 1-0} f(F^{-1}(u)) = \lim_{u\to 1-0} g(G^{-1}(u)) = 0 .$$

(2) $X \prec Y \ (\mathcal{T}_3)$

$G^{-1}F(x)$ が $0<F(x)<1$ で凸。

(3) $X \prec Y \ (\mathcal{T}_2)$

$G^{-1}F(x)$ が $0 < F(x) < 1$ で星型。

(4) $X \prec Y \ (\mathcal{T}_1)$

$G^{-1}F(x)$ が $0 < F(x) < 1$ で増加法的。

(5) $X \prec Y \ (\mathcal{T}_{II})$

$$(1-F(x)) \Big/ \int_x^{\infty} g(G^{-1}F(x))\,dx \quad , \quad 0 < F(x) < 1$$

が存在して非減少。

(6) $X \prec Y \ (\mathcal{T}_{I})$

$$\int_x^{\infty} g(G^{-1}F(x))\,dx \leq (1-F(x)) \int_0^{\infty} g(G^{-1}F(x))\,dx \quad , \quad 0 < F(x) < 1.$$

定義についての説明. a. (2) は $f(F^{-1}(u))/g(G^{-1}(u))$ が存在するとき, これが非減少ということと同等である.

b. 関数 $h(x)$ が星型 (starshaped) であるとは, $h(\lambda x) \geq \lambda h(x)$, $0 < \lambda < 1$, すなわち $h(x)/x$ が非減少であることをいう。また関数 $h(x)$ が増加法的 (superadditive) であるとは $h(x+y) \geq h(x) + h(y)$ であることをいう。

命題 1 a. $X \prec Y(\mathcal{T}_i) \Rightarrow X \prec Y(\mathcal{T}_j)$ という命題を簡単に $\mathcal{T}_i \Rightarrow \mathcal{T}_j$ と表わすと, 次の図式が成りたつ。

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{T}_4 & \Rightarrow & \mathcal{T}_3 & \Rightarrow & \mathcal{T}_2 & \Rightarrow & \mathcal{T}_1 \\
 & & & \searrow & \mathcal{T}_{II} & \Rightarrow & \mathcal{T}_I
\end{array}$$

しかも, これ以外の関係は一般の G にたいしては成立しない。

b. 関係 $X \prec Y$ ($\mathcal{I}_i$; $i=1,2,3,4$) は推移的である。

c. 関係 $X \prec Y$ ($\mathcal{I}_i$; iは任意) はXの尺度の変化と、$F(0)=0$ という範囲での位置の変化に依存しない。すなわち

$$X \prec Y(\mathcal{I}_i) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \prec Y(\mathcal{I}_i)$$
$$(\forall \mu, \ \forall \sigma > 0)$$

(XとYの関係は相対的であるから、Yについて相当の変換をしても同様である。)

証明 a. $\mathcal{I}_4 \Rightarrow \mathcal{I}_3$. 次の補助定理による.

補助定理 A. $p(x)/q(x)$ が $-\infty \leqq a < x < b \leqq \infty$ で存在して非減少であるとする.

$$P(x) = \int_a^x p(x)\,dx + C_p \ , \quad Q(x) = \int_a^x q(x)\,dx + C_q$$

とすると、次の条件の下で $P(x)/Q(x)$, $a<x<b$, が存在して非減少である: $q(x)$ が連続で

$$\lim_{x \to b-0} P(x) = \lim_{x \to b-0} Q(x) = 0,$$
$$P(x),\ Q(x) \geqq 0 \ , \quad a < x < b.$$

$\mathcal{I}_3 \Rightarrow \mathcal{I}_{II}$. これは上の補助定理の変形により証明できる.

$\mathcal{I}_{II} \Rightarrow \mathcal{I}_I$. $\mathcal{I}_{II}$ において $x \to 0$ の場合との比較をする。

$\mathcal{I}_3 \Rightarrow \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathcal{I}_1$. F, G に関する制限 A の下では、$G^{-1}F$ が凸ならば星型、星型ならば凸である.

$\mathcal{T}_2 \not\Rightarrow \mathcal{T}_I$ の反例．$G(y)=y^2$ とする。$G^{-1}F(x)=\sqrt{F(x)}$ $=K(x)$ を次のような星型関数とする．

$$K(x)=\begin{cases} ax^2, & 0<x<c, \\ bx^2+(1-b)x, & c<x<1, \end{cases} \qquad \left|\ \begin{array}{l} 1<a,\ 1>ac \\ b=\dfrac{1-ac}{1-c} \end{array}\right.$$

パラメータを適当に選ぶ（たとえば $a=9$, $c=0.1$）とすると $\mathcal{T}_I$ が成立しない。

他の関係が成り立たないことは G が一様分布，指数分布の場合について後で述べる。

b. $\mathcal{T}_4$ は比による定義により，$\mathcal{T}_3$，$\mathcal{T}_2$，$\mathcal{T}_1$ は，凸，星型，増加法という性質が関数の合成について閉じている，つまり，たとえば凸関数の凸関数は凸関数である，ことによる。

c. 定義の各式において $F(x)$ を $F((x-\mu)/\sigma)$ と変えることは軸の原点と尺度の変換にしか過ぎないことを認めればよい．

<u>例</u> 定義1に基いて諸種の分布型の関連を調べると次の通りとなる．

a. 正規（正部分）< ロジスティック（正部分）< 指数 < パレート ($\mathcal{T}_4$)

b. ロジスティック（正部分）< コーシー ($\mathcal{T}_4$)

コーシーは指数より裾の重い分布とみなされており，実際に $\mathcal{T}_2$ や $\mathcal{T}_3$ の意味で重いと断言しているが，誤りで，われわれの定義では $\mathcal{T}_1$ の意味でも比較不能である．それは，中

心部分を少し除けばコーシーは明らかに裾が重いのであるが，定義1では $(0,\infty)$ 全体での比較とするためである。

c.　パレート　$F_\alpha(x)=1-1/(1+x)^\alpha$，　$0<x<\infty$.　α が大きいほど $\mathcal{T}_4$ の意味で裾が軽い。

d.　ワイブル　$F_\alpha(x)=1-\exp(-x^\alpha)$，　$0<x<\infty$.　α が大きいほど $\mathcal{T}_3$ の意味で裾が軽い。$\mathcal{T}_4$ の意味ではどのような $\alpha=\alpha_1,\ \alpha=\alpha_2$ の対についても比較不可能である。

e.　バー　$F_\alpha(x)=1-1/(1+x^\alpha)$，　$0<x<\infty$，　α が大きいほど $\mathcal{T}_4$ の意味で裾が軽い。

3.　一様分布，指数分布との裾の比較

基準とする分布関数 $G(y)$ として一様分布，指数分布を選ぶことは興味深い。まず一様分布をとりあげる。記号 u で一様分布の分布関数または確率変数を表わすことにする。

<u>命題2</u>　a.　一様分布と $\mathcal{T}_4$ の意味で比較することはできない．$\mathcal{T}_{II}$, $\mathcal{T}_I$ の意味で比較可能であるためには $a=F^{-1}(1)<\infty$ でなければならない．定義1は次のようになる。

(2)　$X<u$ $(\mathcal{T}_3)$　$F(x)$ が凸．$f(x)$ が存在すれば非減少。

(3)　$X<u$ $(\mathcal{T}_2)$　$F(x)$ が星型.

(4)　$X<u$ $(\mathcal{T}_1)$　$F(x)$ が優加法的.

(5)　$X<u$ $(\mathcal{T}_{II})$　$(1-F(x))/(a-x)$ が非減少.

(6) $X < u$ $(\mathcal{T}_I)$ $\quad F(x) \leqq x/a$.

なお $X < u$ $(\mathcal{T}_1)$ ならば $F^{-1}(1) < \infty$ が言える。

b. 次の図式の関係が成り立ち、これ以外は成り立たない。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \mathcal{T}_2 \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{T}_1 \arrow[d, Rightarrow] \\ & \mathcal{T}_{II} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{T}_I \end{tikzcd}$$

証明 a. 比較可能の条件は定義より明らかである. $F(x) < u$ $(\mathcal{T}_1)$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ にたいして $F(x_0) \geqq \varepsilon$ なる x_0 が存在すれば $F(x_0/\varepsilon) \geqq \varepsilon^{-1}F(x_0) \geqq 1$. $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ の意味でより軽ければ有限区間上の分布に限られることとなる.

b. $\mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_I$ は (6) の条件より明らか.

$\mathcal{T}_{II} \not\Rightarrow \mathcal{T}_1$ は

$$F(x) = \begin{cases} a_1 x & 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}a_1 + a_2\left(x - \frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + a_3\left(x - \frac{2}{3}\right) & \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$0 < a_2 < a_1 < 1 < a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

とすれば反例できる。$\mathcal{T}_2 \not\Rightarrow \mathcal{T}_{II}$ は上の反例で $1 < a_1$ とすればよい。

注意 $u < X$ $(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ については上と逆の関係が成り立つ. つまり $F(x)$ が凹 ($f(x)$ が非増加), $F(x)/x$ が非増加, $F(x)$ が劣加法的, となる。しかし $u < X$ $(\mathcal{T}_{II})$ は, $(1-x)\Big/\int_{G(x)}^{\infty} g^2(y)\,dy$ が非減少, となる。

指数分布との比較のため，その分布関数または確率変数を e で表わす。$G(x)=1-e^{-x}$，$G^{-1}(u)=-\log(1-u)$，$g(G^{-1}(u))=1-u$ に注意する

__命題3__ a. 指数分布と比較するとき定義1は次のようになる。

(1) $X<e\ (\mathcal{T}_4)$ Polya type Frequency 2. $-\log f(x)$ が凸，あるいは $(X-a \mid X>a) < (X-a' \mid X>a')\ (\mathcal{R}_3)$，$\forall a>a'>0$.

(2) $X<e\ (\mathcal{T}_3)$ Increasing Hazard (or Failure) Rate. $-\log(1-F(x))$ が凸，あるいは $(X-a \mid X>a) < (X-a' \mid X>a')\ (\mathcal{R}_1)$，$\forall a>a'>0$.

(3) $X<e\ (\mathcal{T}_2)$ Increasing Hazard (or Failure) Rate Average. $-\log(1-F(x))$ が星型.

(4) $X<e\ (\mathcal{T}_1)$ New Better than Used. $-\log(1-F(x))$ が優加法的，あるいは $(X-a \mid X>a) < X\ (\mathcal{R}_1)$，$\forall a>0$.

(5) $X<e\ (\mathcal{T}_{II})$ $-\log\int_x^\infty\{1-F(t)\}dt$ が凸．あるいは $(X-a \mid X>a) < (X-a' \mid X>a')\ (\mathcal{R}_E)$，$\forall a>a'>0$.

(6) $X<e\ (\mathcal{T}_I)$ $1-F(x) \geq \int_x^\infty(1-F(t))dt \Big/ \int_0^\infty(1-F(t))dt$ あるいは $(X-a \mid X>a) > X\ (\mathcal{R}_E)$，$\forall a>0$.

ただし $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_E$ は確率的大小関係で，それぞれ密度の比が非減少，分布関数がより小，期待値がより大，を意味する。

b.　次の包含関係が成立し，これ以外は成りたたない。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_4 \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{J}_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \mathcal{J}_2 \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{J}_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & \mathcal{J}_{II} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{J}_I
\end{tikzcd}
$$

証明　a. 確率的大小に関する議論より明らかである。

b.　$\mathcal{J}_1 \Rightarrow \mathcal{J}_I$ は $\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_E$ より明らかである。

$\mathcal{J}_{II} \not\Rightarrow \mathcal{J}_1$.　$1-F(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}}$，$\alpha > 1$，とすると

$\psi(x) = -\log(1-F(x)) = x^{\alpha} - (\alpha-1)\log x - \log \alpha$ が超加法的でない。実際，$\psi(2x) - 2\psi(x) < 0$，$x \to 0+$.

$\mathcal{J}_2 \not\Rightarrow \mathcal{J}_{II}$.　$1-F(x) = e^{-\varphi(x)}$，　$\varphi(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, \ \alpha > 1, & x \leqq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$

とすると，

$$\{1-F(1-\varepsilon)\} \Big/ \int_{1-\varepsilon}^{\infty} \{1-F(t)\}\, dt \doteqdot \alpha\varepsilon / (e^{-1}+\varepsilon) \downarrow \quad (\varepsilon \to 0)$$

4.　裾の軽さの検定（$\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_2$）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を $F(x)$ からの確率標本とするとき，検定問題

$$H_0: \quad F = G \ (\mathcal{J}_3) \qquad (\text{すなわち } F \succ G \text{ かつ } F \prec G \ (\mathcal{J}_3)).$$

$$H_1: \quad F < G \ (\mathcal{J}_3)$$

を考える。検定統計量を導く動機として次の変換を考える。

$$H_F^{-1}(t) \underset{def}{=} \int_{-\infty}^{F^{-1}(t)} g[G^{-1}F(x)]\, dx = \int_0^t \frac{g(G^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))}\, du$$

これにより，上の検定問題は

H_0: $H_F(x)$ が $0 < H(x) < 1$ で線形.

H_1: $H_F(x)$ が $0 < H(x) < 1$ で凸.

という問題に変換される。しかも，この変換の利点は，$K \prec F \prec G$ ($\mathcal{J}_3$) という関係があるとされ，これを

$$\frac{H_K^{-1}(t)}{H_K^{-1}(1)} \geq \frac{H_F^{-1}(t)}{H_F^{-1}(1)} \geq t \,, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

(分母は有限であるとして)，という確率的大小関係に移すことである。この $H_F^{-1}(t)$ を経験分布関数を用いて近似すると，

$$H_{F_n}^{-1}(t) = \int_0^{F_n^{-1}(t)} g[G^{-1} F_n(u)]\, du$$

$$H_{F_n}^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{j=1}^{i} g\left[G^{-1}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right] (X_{(j)} - X_{(j-1)})$$

$$= n^{-1} \sum_{j=1}^{i} (n-j+1)(X_{(j)} - X_{(j-1)}) \qquad (G(y) = 1 - e^{-y} \text{ のとき})$$

これは，寿命試験の言葉では，$X_{(i)}$ が死ぬまでの寿命の総和 (total time on test) である。

<u>命題4</u> (Barlow + Doksum) $K \prec F \prec G$ ($\mathcal{J}_3$) のとき，

$$\frac{H_{K_n}^{-1}(i/n)}{H_{K_n}^{-1}(1)} \succ \frac{H_{F_n}^{-1}(i/n)}{H_{F_n}^{-1}(1)} \succ \frac{H_{G_n}^{-1}(i/n)}{H_{G_n}^{-1}(1)} \qquad (\mathcal{R}_1)$$

<u>系</u> ($W_i \underset{\mathrm{def}}{=} H_{F_n}^{-1}(i/n) / H_{F_n}^{-1}(1)$, $i = 1, \cdots, n$) の非減少関数を検定統計量とする検定 ϕ の検出力は $\beta_\phi(K) \geq \beta_\phi(F) \geq \beta_\phi(G)$.

(このような検出力の一様単調性を彼らは isotonic と呼んでいる。)

具体的な検定統計量として、次のようなものが考えられる。

(1) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} J(W_i)$　　$J(\cdot)$ は $[0,1]$ 上の増加関数.

特に $J(x)=x$ のとき、$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}(n-j+1)(X_{(j)}-X_{(j-1)})\Big/\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)(X_{(j)}-X_{(j-1)})$ は、cumulative total time on test statistic と呼ばれ、コルモゴロフ距離で隔てられる対立仮説に関して、J がある regularity condition を満たす範囲内で、漸近的にミニマックスである。

(2) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} L(\frac{j}{n})W_j$, $L(u)\geqq 0$.

(3) $\sup|W_j - j/n|$.

ところで、上記の (1), (2) は和を書き直せば $X_{(j)}/\sum X_{(j)}$ の1次結合として表わすことができる。このような統計量に関しては、実は、より強い命題が成り立つ。

<u>命題5</u>　$K \prec F \prec G$ $(\mathcal{J}_2)$ とすると、G, F, K それぞれからの独立標本の順序統計量 $X_{(1)}\leqq\cdots\leqq X_{(n)}$; $Y_{(1)}\leqq\cdots\leqq Y_{(n)}$; $Z_{(1)}\leqq\cdots\leqq Z_{(n)}$ に関して

$$\frac{\sum_{j=1}^{i}c_j Z_{(j)}}{\sum_{j=1}^{n}c_j Z_{(j)}} \succ \frac{\sum_{j=1}^{i}c_j Y_{(j)}}{\sum_{j=1}^{n}c_j Y_{(j)}} \succ \frac{\sum_{j=1}^{i}c_j X_{(j)}}{\sum_{j=1}^{n}c_j X_{(j)}} \qquad (\mathcal{R}_1)$$

が成り立つ。$c_1, \ldots, c_n > 0$ は任意の係数。

<u>証明</u>　だいたい命題4の証明に従う。X, Y の関係だけを

証明すれば十分である。$V_i = G^{-1}F(Y_{(i)})$ とすると，$G^{-1}F$ が星型であるから，$V_i / Y_{(i)}$ が i に関して非減少である。今母子に c_i を乗じて，補助定理 A に類似の定理を適用すれば，$\sum_{j=1}^{i} c_j V_j \big/ \sum_{j=1}^{i} c_j Y_{(j)}$ が i に関して非減少となる。

$$\frac{\sum_{j=1}^{i} c_j V_j}{\sum_{j=1}^{i} c_j Y_{(j)}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j V_j}{\sum_{j=1}^{m} c_j Y_{(j)}} \quad \text{より} \quad \frac{\sum_{j=1}^{i} c_j Y_{(j)}}{\sum_{j=1}^{m} c_j Y_{(j)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{i} c_j V_j}{\sum_{j=1}^{m} c_j V_j}$$

$(V_1, \cdots, V_m)$ は $(X_{(1)}, \cdots, X_{(m)})$ と同一の分布に従うから上記の結論が得られる。

$c_1 = \cdots = c_n = 1$ とし，上の統計量の1次結合を作れば，前記の例 (1), (2) の統計量が得られる。

5. 裾の軽さの検定 ($\mathcal{J}_1$)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を $F(x)$ からの確率標本とするとき，検定問題

$$H_0:\ F = G\ (\mathcal{J}_1) \qquad (F \succ G \text{ かつ } F \prec G\ (\mathcal{J}_1))$$

$$H_1:\ F \prec G\ (\mathcal{J}_1)$$

を考える．より強い $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ の条件が成り立つならば前節の検定を用いる方がより大きな検出力を期待できるが，広い対立仮説の下では他の検定法を考えねばならない。

検定統計量を導く動機として，G が指数分布の場合を考え

3. $F \prec e\ (\mathcal{Y}_1) \iff \bar{F}(x)\bar{F}(y) \geqq \bar{F}(x+y)$, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$

$$\Rightarrow \quad \iint \{\bar{F}(x)\bar{F}(y) - \bar{F}(x+y)\}\, dF(x)\, dF(y)$$
$$= \frac{1}{4} - \iint \bar{F}(x+y)\, dF(x)\, dF(y) \geqq 0$$

したがって「$\iint \bar{F}_n(x+y)\, dF_n(x)\, dF_n(y)$ が小さ過ぎれば棄却する」ことが考えられるが，これと漸近的に同等な統計量として

$$J_n(X_1, \cdots, X_n) = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum{}' \phi(X_{\alpha_1},\ X_{\alpha_2} + X_{\alpha_3})$$

$$\phi(a, b) = \begin{cases} 1 & a \geqq b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

$\sum'$: $1 \leqq \alpha_i \leqq n$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, $\alpha_2 < \alpha_3$

を満たす $n(n-1)(n-2)/2$ 個の3つ組 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ についての和.

が考えられる. 次の命題が容易に証明できる。

<u>命題6</u> (Hollander + Proschan) $(X_1, \cdots, X_n)$, $(Y_1, \cdots, Y_n)$ が F, G からの確率標本であり, $F \prec G\ (\mathcal{Y}_1)$ ならば

$$J_n(X_1, \cdots, X_n) \prec J_n(Y_1, \cdots, Y_n). \quad (\mathcal{R}_1).$$

ただし与えられた第1種の過誤の確率に対応する J_n の検定規準を求めるための計算は一般に G に依存し，たとえ n が小さいときにも容易ではない。n が少し大きく，また $G(x)$ が簡単であればモンテ・カルロ計算にでも頼らなければならない。

6. おわりに.

残された問題を列挙しておく.

(1) 諸分布間の裾の重さをさらに比較すること.

(2) $X<Y$ $(\mathcal{J}_4)$ の検定を考えること.

(3) 正規分布の検定について第4, 5節の議論を考えること, 一般には $(-\infty, \infty)$ における中心未知の対称分布の裾の軽さの(重さの)検定を考えること.

(4) 離散分布の分布型の検定. たとえば幾何分布, ポアッソン分布.

(5) 裾の重さの程度と, 若干の付帯条件による分布型の特徴づけ.

以上.

参照文献

§§2−3 柳本武美・渋谷政昭, 確率的大小とノンパラメトリック推論, 分布の裾の重さを中心として, 日本数学会秋季総合分科会, 1973年, 統計数学分科会予稿

§ 4 R. E. Barlow and K. A. Doksum, Isotonic tests for convex orderings, 6th Berkeley Symposium (1972), 293−323.

これと同内容のものが次書にある.

R. E. Barlow, D. J. Bartholomew, J. M. Bremner and H. D. Brunk; Statistical Inference under Order Restrictions, John Wiley, 1972.

§5 M. Hollander and F. Proschan, Testing whether new is better than used, Ann. Math. Stat., 43 (1972), 1136–1146.

（上記 柳下・渋谷 の文献も見よ。）