数理解析研究所講究録
第224巻 1974年 20-26

On the monodromy groups of some differential equations

東大 理　高野 恭一

2月の研究会で、Jordan-Pochhammer の方程式（以下 J.P.E. と略す）のモノドロミー群が有限群になるための必要十分条件を与えた。この条件は、任意の解が代数関数であることと同値である。ここでは、こうして得られた代数関数解の Riemann 面の様子を調べる。

§1、Jordan-Pochhammer の方程式のモノドロミー群が有限群になるための条件.

J.P.E. に関することを簡単にまとめておく。方程式は

$$(1)\quad Q(x)y^{(n)} - \mu Q'(x)y^{(n-1)} + \frac{\mu(\mu+1)}{2}Q''(x)y^{(n-2)} - \cdots - R(x)y^{(n-1)} + (\mu+1)R'(x)y^{(n-2)} - \cdots = 0.$$

ここに

$$Q(x) = (x-a_1)\cdots\cdots(x-a_n),$$

$$R(x)/Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j/x-a_j .$$

(1)は、$x=a_1,\cdots,a_n,\infty$ 以外に特異点をもたないn階線型Fuchs型微分方程式で、各特異点における特性指数は

(2)
$$\begin{cases} x=a_j \ ; \ 0,\ 1,\ \cdots\cdots\ n-2,\ \mu+n-1+\alpha_j,\ (j=1,\cdots n) \\ x=\infty \ ; \ -(\mu+1),\ \cdots\cdots\ -(\mu+n-1),\ -(\mu+\alpha_1+\cdots+\alpha_n) \end{cases}$$

である。

(1)の基本解として

(3)
$$y_j(x)=\int_{\Gamma_j}(u-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots\cdots(u-a_n)^{\alpha_n-1}(u-x)^{\mu+n-1}du,\ (j=1,\cdots n)$$

がとれることが知られている。ここでΓ_jは$x=a_j,\infty$を回る二重結びの道である。

(3)を基本解としたときのJ.P.E.のモノドロミー群Gは

(4)
$$g_j=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ -(1-\varepsilon_1), & \cdots, -(1-\varepsilon_{j-1}), & \varepsilon_0\varepsilon_j, & -\varepsilon_0(1-\varepsilon_{j+1}), & \cdots & & -\varepsilon_0(1-\varepsilon_n) \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

で生成される群である。即ち

$$G=\langle g_1,\cdots g_n\rangle\ (\subset GL(n,\mathbb{C})).$$

ここで、g_jは$x=a_j$を正の方向に一回転する道に対応する変換行列で、

(5)
$$\begin{cases} \varepsilon_j=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_j) \quad j=1,\cdots n. \\ \varepsilon_0=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mu) \end{cases}$$

である。

(1)が rational functions 上 irreducible であるための必要十分条件は

(6) $\varepsilon_0 \neq 1,\ \varepsilon_j \neq 1,\ j=1,\dots,n,\ \varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \neq 1$

であることが知られている。(御前)。 (6)は $G=\langle g_1,\cdots g_n\rangle$ が irreducible であるための条件でもある。

次の定理は既にお話してある。

$\boxed{\text{定理1}}$「条件(6)を仮定しておく。このとき(1)のモノドロミー群 $G=\langle g_1,\cdots,g_n\rangle$ $n\geq 3$ が有限群であるためには、定数 $\alpha_1,\dots\alpha_n$, μ が次表で示されるいづれかの値をとることが必要かつ十分である。

	n	α_i	α_j	α_k	α_l	μ	備考($\|G\|$)
[1]	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	$\|G\|=54$
([1'])	(3)	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$		$(\frac{2}{3})$	〃
[2]	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\|G\|=648$
([2'])	(3)	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$		$(\frac{5}{6})$	〃
[3]	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\|G\|=1296$
([3'])	(3)	$(\frac{2}{3})$	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$		$(\frac{5}{6})$	〃
[4]	4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\|G\|=216\times 6!$
([4'])	(4)	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6})$	〃

但し、α_i, α_j, α_k, α_l, μ の値は mod. 1 で表の値に等しければよい。」

注意：[1]と[1']は群Gにおいて、complex conjugate の関係にある。他も同様。

後に使うので定理の各場合に群の generators を具体的に書いておく。

[1]の場合 $g_1=\begin{pmatrix} -1, & \omega^2 & \omega^2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ \omega & -1, & \omega^2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $g_3=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \omega, & \omega, & -1 \end{pmatrix}$

[2] 〃 $g_1=\begin{pmatrix} \omega, & -1, & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ \omega, & \omega, & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $g_3=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \omega, & \omega, & \omega \end{pmatrix}$

[3] 〃 $g_1=\begin{pmatrix} -1, & -1, & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ \omega-1, & \omega, & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $g_3=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \omega-1, & \omega, & \omega \end{pmatrix}$

[4] 〃 $g_1=\begin{pmatrix} \omega, & -1, & -1, & -1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \omega, & \omega, & -1, & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $g_3=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \omega, & \omega, & \omega, & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$g_4=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \omega & \omega & \omega & \omega \end{pmatrix}$

§2、J.P.E.の解のRiemann面について.

定理1で調べあげた各場合について、解のRiemann面を見ることにする。以下(1)のすべての解は代数関数であることにしておく。

(1)の任意の解は、(2)で与えられた基本解 $y_1(x), \cdots y_n(x)$ を用いて、

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = (y_1(x), \cdots y_n(x)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

とかける。これを $y(x; c_1, \cdots, c_n)$ とかく。$y(x; c_1, \cdots c_n)$ は $x = a_1, \cdots, a_n, \infty$ のみを代数的特異点とする代数関数である。

γ を $\mathbb{P} - \{a_1, \cdots, a_n, \infty\}$ の中の閉曲線とし、γ に対応するモノドロミー群 G の元を g_γ とする。$y(x; c_1, \cdots c_n)$ を γ に沿って解析接続すると

$$(y_1(x), \cdots y_n(x)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\gamma]{} (y_1(x), \cdots y_n(x))\, g_\gamma \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

である。

従って、$y(x; c_1, \cdots c_n)$ の Riemann 面は、

$$\left\{ g \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \ g \in G \right\}$$

を調べてやればわかる。

$y_1(x; c_1, \cdots c_n)$ の $\underbrace{x = a_j}_{(j=1, \cdots n)}$ 上にある分岐点を P_j^h $h = 1, 2, \cdots$

$x = \infty$ 上にある分岐点を P_0^h, $h = 1, 2, \cdots$ とかくことにし、

分岐点 P_j^h の分岐度を $e_{P_j^h}$ で表わす。

$$\# \left\{ g \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} ; g \in G \right\} = m$$

とすれば、Hurwitz の公式から、$y(x; c_1, \cdots c_n)$ の Riemann 面の genus p は

(7) $$p = \frac{1}{2}\sum\left(e_{p_j^h} - 1\right) + 1 - m$$

で与えられる。

さて、 $g \in G$, $g \neq 1$ に対して

$$S_g \overset{\text{def}}{=} \{ c \in \mathbb{C}^n,\ gc = c \},$$

とし、

$$S_G \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} S_g$$

とする。ここで、S_g は codim. 1 以上の $\mathbb{C}^n$ の linear subspace で、$|G| < \infty$ だから、$\bigcup_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}}$ は有限和であることに注意する。

$c \in \mathbb{C}^n - S_G$ ならば明らかに

$$m = |G|$$

$$e_{p_j^h} = g_j \text{ の order} \qquad j = 1, \ldots n, \quad h = 1, 2, \ldots$$

$$e_{p_0^h} = g_n \cdot g_{n-1} \cdot \cdots \cdot g_1 \text{ の order}$$

である。このときには $y(x; c_1, \cdots c_n)$ の Riemann 面の様子はすぐわかる。$c \in S_G$ の場合にも、手間さえいとわなければ、（c が具体的に与えられれば）できる。

こうして次の定理が得られる。

$\boxed{\text{定理2}}$「定理1の各場合について、$c \in \mathbb{C}^n - S_G$ ならば、$y(x; c_1, \cdots c_n)$ のRiemann面について次のことがわかる。

	e_{P_i}	e_{P_j}	e_{P_k}	e_{P_l}	e_{P_0}	m	p=genus
[1]	2	2	2		6	54	10
[2]	3	3	3		6	648	271
[3]	2	3	3		6	1296	433
[4]	3	3	3	3	6	$216 \cdot 6!$	$972 \cdot 5! + 1$

」

注意：方程式(1)は、$x = a_j$ において正則な解をもつ。この解のRiemann面の分岐の様子は、上の定理のものと異なる。すなわちこのときは $c \in S_G$ になっているのである。

文献

[1] E.L. Ince; Ordinary differential equations, 1926

[2] G.C. Shephard and J.A. Todd; Finite unitary reflection groups, Can. J. Math. 6 (1954), 274−304.

[3] 高野恭一；代数関数を一般解としてもつ線型常微分方程式の例，数理研講究録 1974、2.