数理解析研究所講究録
第 226 巻 1975 年 29-38

Maximally degenerate な台を持つ擬微分方程式について.

東大 理 大島利雄

点 $x_0^* \in P^*X$ の近傍で定義された n 変数の単独の擬微分方程式 $\mathcal{M}$ で，次の仮定を満たすものについて考察する.

$$\mathcal{M} \ : \ P(x_1, \cdots, x_n, D_1, \cdots, D_n)u = 0$$

とおくとき，その台 $V = \operatorname{Supp} \mathcal{M} \equiv \{\sigma(P) = 0\} \subset P^*X$ が maximally degenerate である. 即ち，$L = \{x^* \in V; i_V^* \omega(x^*) = 0\}$ $(i_V : V \hookrightarrow P^*X)$ としたとき，[1] $\dim L = n-1$ となると仮定する. この場合，L は non-singular な Lagrangean manifold となり，量子化された接触変換により，$\mathcal{M}$ は次の形をしていると考えてよい. (cf. 大島[2])

(1) $\mathcal{M} \ : \ Pu = 0 \ , \ P = (x_n \frac{\partial}{\partial x_n})^m + P_1(x, D_x)(x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^{m-1} + \cdots + P_m(x, D_x)$

ここで，$x_0^* = (0; dx_n)$, $V = \{x_n = 0\}$, $L = \{(x, \xi dx) \in P^*X \ ; \ \xi_1 = \cdots = \xi_{n-1} = x_n = 0\}$ また，$\operatorname{ord} P_j \leq j-1 \quad (1 \leq j \leq m)$

<u>定義</u> (1) が確定特異点型 $\iff$ $\operatorname{ord} P_j \leq 0 \qquad (1 \leq j \leq m)$

1) $\omega = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n$ は P^*X の fundamental 1-form

以下，$\mathcal{M}$ は(1)の形をしていて，しかも確定特異点型であると仮定して話を進める．

$\sigma(P_j)$ を P_j の0階の symbol とするとき

(2) $$\lambda^m + \sigma(P_1)|_L \cdot \lambda^{m-1} + \cdots + \sigma(P_m)|_L$$

を P の特性多項式と言い，その根 $\lambda_j(x')$ $(1 \leq j \leq m)$ を特性根と言うことにする． $(\ x = (x', x_n)\ )$

<u>定理1</u> $\mathcal{M}^f = \mathcal{P}^f / \mathcal{P}^f P$ は left $\mathcal{P}^f$-module として，次の方程式 $\mathcal{N}_{\rho_\nu}$ の直和に同型である．（$\mathcal{P}^f$ は有限階の擬微分作用素の作る環を表わす）

(3) $$\mathcal{N}^f_{\rho_\nu} : \left\{ x_n \frac{\partial}{\partial x_n} I_{m_\nu} - A^\nu(x', D_{x'}) \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m_\nu} \end{pmatrix} = 0 \qquad \nu = 1, \cdots, l$$

但し，A^ν は変数 x' のみに関する微分作用素（擬微分でない）で，size が m_ν の正方行列．しかも小ブロックに分けて

$$A^\nu(x', D_{x'}) = \left(A^\nu_{ij}(x', D_{x'}) \right)_{1 \leq i,j \leq k_\nu} \quad \text{と表わせ}$$

$A^\nu_{ij}(x', D_{x'})$ は size が $r^\nu_i \times r^\nu_j$ の行列で，$\left(\sum_{j=1}^{k_\nu} r^\nu_j = m_\nu \right)$

(i) $i > j$ のとき $A^\nu_{ij}(x', D_{x'}) \equiv 0$

(ii) $i = j$ のとき $A^\nu_{ij}(x', D_{x'})$ は0階，即ち L 上の函数で

$$A^\nu_{ii}\Big|_{x'=0} = \begin{pmatrix} \rho_\nu & \star & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \star \\ & & & \rho_\nu \end{pmatrix}$$

★の部分は0又は1．
（固有値 ρ_ν に属するJordan細胞の直和）

(iii) $N_i^\nu \in \mathbb{Z}$ が存在して "$i_1 < i_2 \Rightarrow N_{i_1}^\nu > N_{i_2}^\nu$" となり，$i < j$ のとき $A_{ij}^\nu(x', D_{x'})$ の各成分は，階数が $(N_i^\nu - N_j^\nu)$ 以下の L 上の微分作用素である．

ここで，(2) の特性根の $x' = 0$ における値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ とする時，$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ の mod $\mathbb{Z}$ での代表元を $\rho_1, \cdots, \rho_\ell$ ととることができる．　($i \neq j \Rightarrow \rho_i \neq \rho_j$)

・m_ν は mod $\mathbb{Z}$ で ρ_ν に等しくなる $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ の元の数．それらを実数部分の大きな順に並べたものを $\lambda_{j1}^\nu, \cdots, \lambda_{jk_\nu}^\nu$ とすると（但し，等しいものは重複して並べず省く）

・$N_i^\nu = \lambda_{ji}^\nu - \rho_\nu \quad (1 \leq i \leq k_\nu)$

・I_i^ν は λ_{ji}^ν に等しい $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ の元の数．

注意 (イ) 特性多項式が $\mathcal{O}_{L_{x_0^*}}$ の中で 1 次式の積に分解されれば (i.e. $\lambda_j(x') \in \mathcal{O}_{L_{x_0^*}}$, $1 \leq j \leq m$)，A^ν はすべて上三角行列にとることができる．

(ロ) $\lambda_j(0)$ が互に異なっていれば $^\forall I_i^\nu = 1$

(ハ) $\lambda_j(0)$ が mod $\mathbb{Z}$ で互に異なっていれば $^\forall m_\nu = 1$．従って，A_{ij}^ν は函数．

(ここで，(ハ) $\Rightarrow$ (ロ) $\Rightarrow$ (イ) となっている)

(1) が微分方程式ならば，定理 1 は微分方程式の category の中で成立する．さらに特に $n = 1$ の場合は，確定特異点型の常

微分方程式に関するよく知られた定理が先の定理1に対応していることに注意しよう。

$m=1$ の場合は，大島[2] Theorem 3.2 に含まれる。
定理1は，その Theorem 3.2 の証明と同様な方法で証明されるが，S-K-K [3] Chap. II. Theorem 5.2.1 の証明に使われた Boutet de Monvel and Krée のノルムを用いて iteration で解くこともできる。

(1) の $\mathcal{M}$ は $\Omega=\{(x;\xi' dx'+\xi_n dx_n);\ |x|\leq\varepsilon,\ |\xi'|\leq\varepsilon,\ |\xi_n|=1\}$ の近傍で定義されているとしてよい。（$0<\varepsilon$ は十分小）
$|\xi_0'|=\varepsilon$ となる ξ_0' を fix し，$\tilde{x}_\theta^*=(0;\xi_0' dx'+e^{i\theta}dx_n)\in P^*X$ とおく。さらに $\mathcal{N}_0=\mathcal{P}/\mathcal{P}x_n$，$\mathcal{N}_0^m=\underbrace{\mathcal{N}_0\oplus\cdots\oplus\mathcal{N}_0}_{m\text{ケ}}$ とおく。
S-K-K [3] Chap II. Theorem 5.2.1 により
（$\mathcal{M}$ が確定特異点型であるという仮定はここでは不要）

$$\exists\ U_0:(\mathcal{N}_0^m)_{\tilde{x}_0^*}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}_{\tilde{x}_0^*}$$

となるが，これは

$$U_\theta:(\mathcal{N}_0^m)_{\tilde{x}_\theta^*}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}_{\tilde{x}_\theta^*}$$

に接続される。（$\theta\in\mathbb{R}$）
従って，$U_0^{-1}\cdot U_{2\pi i}\in \mathcal{A}ut_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^m)_{\tilde{x}_0^*}/\sim$ となる。
ここで，$U, V\in \mathcal{A}ut_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^m)_{\tilde{x}_0^*}$ に対し，$W\in \mathcal{A}ut_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^m)_{\tilde{x}_0^*}$ が存在して $WUW^{-1}=V$ となる時，$U\sim V$ と定義した。

★ $\mathcal{M}$ が確定特異点型の時，$U_0^{-1}\cdot U_{2\pi i}\in \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^m)_{\tilde{x}_0^*}/\sim$ は，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^m)_{x_0^*}/\sim$ の元に接続される．これを $\mathcal{M}$ の monodromy と定義し，$\rho(\mathcal{M})$ と書く．　($x_0^*=(0,dx_n)$)

<u>注意</u>・$U_0^{-1}\cdot U_{2\pi i}\in \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^m)_{\tilde{x}_0^*}/\sim$ は同値関係で割っているので，U_0の取り方によらないことが容易にわかる．

・$X'=\{x_n=0\}\subset X$ とおけば

$$\mathcal{E}nd_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0)\simeq\{P\in\mathcal{P}\,;\,[x_n,P]=[D_n,P]=0\}\simeq\mathcal{D}_{X'}$$

(3) の $\mathcal{N}^f_{\rho_\nu}$ に対して，$\rho(\mathcal{P}\underset{\mathcal{P}^f}{\otimes}\mathcal{N}^f_{\rho_\nu})$ は

$$(P_1,\cdots,P_{m_\nu})\longmapsto(P_1,\cdots,P_{m_\nu})\,\exp\,(2\pi i\,A^\nu(x',D_{x'}))$$

で与えられる $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^{m_\nu})_{x_0^*}/\sim$ の元となる．

<u>予想</u>　上の★は $\mathcal{M}$ が確定特異点型でなくても正しい．

定理1の標準型を用いて，次の2つの定理を証明することができる．

<u>定理2</u>　$\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ が共に確定特異点型とする．このとき

$$\mathcal{M}_1\simeq\mathcal{M}_2\iff\rho(\mathcal{M}_1)=\rho(\mathcal{M}_2)$$

<u>定理3</u>　$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$が共に確定特異点型で，その多重度がそれぞれ$m_1, m_2$であるとする．この時．complex

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^{m_1}, \mathcal{N}_0^{m_2}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_0^{m_1}, \mathcal{N}_0^{m_2}) & \longrightarrow 0 \\ & \begin{array}{c}\Psi\\ F\end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c}\Psi\\ F\rho(\mathcal{M}_1) - \rho(\mathcal{M}_2)F\end{array} & \end{array}$$

は，$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$に等しい．

<u>系</u>　$\lambda_i^1(x')$を$\mathcal{M}_1$の特性根，$\lambda_j^2(x')$を$\mathcal{M}_2$の特性根とする．

・$\lambda_i^1(x') - \lambda_j^2(x') \notin \mathbb{Z}$　（恒等的に整数とはならない）
$1 \leq i \leq m_1,\ 1 \leq j \leq m_2$

$\Rightarrow\ \mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = 0$

・$\lambda_i^1(0) - \lambda_j^2(0) \notin \mathbb{Z}$　　$1 \leq i \leq m_1,\ 1 \leq j \leq m_2$

$\Rightarrow\ \mathcal{E}xt_{\mathcal{P}}^1(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = 0$

<u>例</u>　$\mathcal{M}_f\ :\ (x_n \frac{\partial}{\partial x_n} - f(x'))\, u = 0$　とする時，

$$\cdot\ \mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_g) \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } f-g \notin \mathbb{Z} \\ \{P \in \mathcal{D}_{X'}\ ;\ [P, f] = 0\} & \text{if } f-g \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cdot\ \mathcal{E}xt_{\mathcal{P}}^1(\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_g) \simeq$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } f(0)-g(0) \notin \mathbb{Z} \\ \mathcal{D}_{X'}/\mathcal{D}_{X'}((f-f(0)) - (g-g(0))) & \text{if } f(0)-g(0) \in \mathbb{Z},\ f-g \notin \mathbb{Z} \\ \mathcal{D}_{X'}/\{[P,f]\ ;\ P \in \mathcal{D}_{X'}\} & \text{if } f-g \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

・$\operatorname{grad} f \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}xt_{\mathcal{P}}^1(\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_f) = 0$

・$f \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}xt_{\mathcal{P}}^1(\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_f) \simeq \mathcal{D}_{X'}$

予想　定理２．３は $\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2$ が確定特異点型でなくても（i.e. 不確定特異点型であっても）正しい．

$n=1$ の場合，即ち常擬微分方程式の場合は，不確定特異点型であっても，無限階の擬微分方程式の環 $\mathcal{P}$ の中で考えれば定理１が成立することが，河合隆裕氏，柏原正樹氏により証明されている．これは，不確定特異点型であっても，$\mathcal{P}$-module で考えれば，ある確定特異点型の擬微分方程式と同型になることを言っている．従って上の予想は正しい．

しかし，$n \geq 2$ の場合は，left $\mathcal{P}$-module として考えても，確定特異点型のものに同型にならない不確定特異点型のものが存在する．（cf．次の例）

例　$\mathcal{M}$: $\{(x_n \frac{\partial}{\partial x_n})^2 - (\frac{\partial}{\partial x_1} + c)\} u = 0$　　$(c \in \mathbb{C})$

$\mathcal{N}_\lambda$: $(x_n \frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda) u = 0$　　$(\lambda \in \mathbb{C})$

この時，$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_\lambda, \mathcal{M})$ は次の map の cokernel と同型

$$T : \mathcal{D}^2_{X'} \longrightarrow \mathcal{D}^2_{X'}\,,$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} + c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \lambda$$

明らかに，$\mathrm{Image}\, T \not\ni \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので，$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_\lambda, \mathcal{M}) \neq 0$．一方，$\mathcal{M}$ が left $\mathcal{P}$-module として，確定特異点型のものと同型になるとすると，その特性根

とλとが mod $\mathbb{Z}$ で独立なら $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{P}}(\mathcal{N}_\lambda, \mathcal{M}) = 0$ となるはずである．(定理3の系)． このことから，$\mathcal{M}$ が left $\mathcal{P}$-module として確定特異点型にならないことがわかる．

定理の応用として，柏原正樹氏により定義された"確定特異点型境界値問題での境界値をとる操作"（cf. 柏原 [1]）について述べよう．

M : n-次元実解析多様体 $\ni (x_1, \cdots, x_n)$

N : $x_n = 0$ で定義される超曲面 $\subset M$

$M_+ = \{x_n > 0\} \subset M$

X, Y をそれぞれ M, N の複素近傍とする．

<u>定義</u> M上の微分方程式 $\mathcal{M}: Pu = 0$ が N に関して確定特異点型である

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $P = P(x_n\frac{\partial}{\partial x_1}, x_n\frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, x_n\frac{\partial}{\partial x_n}; x_1, \cdots, x_n)$ の形をしていて，$\mathrm{ord}\, P = m < \infty$ しかも，

$\sigma(P) = P_m(x_n\xi_1, \cdots, x_n\xi_n; x_1, \cdots, x_n)$ とおけば，

$$P_m(0, \cdots, 0, 1; x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) \neq 0.$$

この時，

点 $x_0^* \in \sqrt{-1}S_N^*M \hookrightarrow P_Y^*X$ で $\mathcal{P}\underset{\pi^{-1}\mathcal{D}}{\otimes}\pi^{-1}\mathcal{M}$ は，p1 における意味で確定特異点型になる．その特性根達を，$\lambda_1(x'), \cdots, \lambda_m(x')$ とおく．

目標は，$\mathcal{H}^0(M_+, \mathcal{B}_M^P) \hookrightarrow (\mathcal{B}_N)^m$ を示すこと．

簡単のため，$\lambda_1(x_0^*), \cdots, \lambda_m(x_0^*)$，0，が互に mod $\mathbb{Z}$ で独立であると仮定しよう．この時，

<u>1</u> $\quad \mathcal{H}^0_{\overline{M_+}}(M, \mathcal{B}_M^P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(M_+, \mathcal{B}_M^P)$

<u>証明</u> $\mathcal{N} = \mathcal{P}/\mathcal{P}x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}\frac{\partial}{\partial x_i}$ とおくと $\mathcal{N} \simeq C_{Y|X}$ である．

定理1又は定理3の証明より容易に次式を得る．

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(\mathcal{P} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{M}; C_{Y|X}) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(\mathcal{P} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{M}; \mathcal{N}) = 0 .$$

$0 \longrightarrow (\pi^{-1}\mathcal{B}_{Y|X})_{x_0^*} \xrightarrow{i} (C_{Y|X})_{x_0^*}$ に対し，$(x_0^* \in P_Y^* X)$

$j : (C_{Y|X})_{x_0^*} \to (\pi^{-1}\mathcal{B}_{Y|X})_{x_0^*}$ が存在して $j \circ i = id.$ となっている．しかも P が確定特異点型であることより，i, j は，map $P : C_{Y|X} \to C_{Y|X}$ と可換であることがわかるので

$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_{Y|X}) = 0$ を得る．

$$\begin{aligned}
\therefore\ 0 &= \mathbb{R}\Gamma_N \, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_{Y|X}) \\
&= \mathbb{R}\Gamma_N \, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; \mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)[1]) \\
&= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; \mathbb{R}\Gamma_N(\mathcal{O}_X)[1]) \\
&= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; \Gamma_N \mathcal{B}_M)[1-n]
\end{aligned}$$

従って，次の exact sequence

$$0 \to \Gamma_N(M, \mathcal{B}_M) \to \Gamma_{\overline{M_+}}(M, \mathcal{B}_M) \to \Gamma(M_+, \mathcal{B}_M) \to 0$$

に $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}; \cdot)$ をほどこせば <u>1</u> の主張が得られる．

$\underline{2}$ $\quad \mathcal{H}^{0}_{\overline{M}_+}(M, \mathcal{B}^{P}_{M}) \hookrightarrow (\mathcal{B}_N)^m$

<u>証明</u> $\quad Pu = 0 \quad (u \in \mathcal{H}^{0}_{\overline{M}_+}(M, \mathcal{B}^{P}_{M}))$ を $x_0^* \in \sqrt{-1}S_N^*M$ における擬微分方程式と, microfunction solution とみなすと, 定理1より次のように表わせることがわかる.

$$sp(u) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x', D_x)\,(f_j(x') \cdot x_{n_+}^{\lambda_j(x')})$$

$(\ Q_j \in \mathcal{P}^f, \quad \mathrm{ord}\, Q_j = 0, \quad f_j \in \mathcal{B}_N\ )$

ここで,

$[\frac{\partial}{\partial x_n}, Q_j] = 0, \quad \sigma(Q_j)|_{P_Y^* X} \equiv 1$ という normalization により Q_j は unique に定まり, f_j も u によって unique に定まる. $\underline{2}$ の map は $u \mapsto sp(u) \mapsto (f_j)_{1 \le j \le m}$ によって定義される. その map が injective なことは, Holmgren の定理より明らか.

References

柏原正樹 [1] : 1974年4月の学会での講演

大島利雄 [2] : Singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. IA, Vol <u>21</u> (1974), pp. 43 - 83.

S-K-K [3] : Sato, M., T. Kawai and M. Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, Proceedings of a Conference at Katata, 1971, Lecture Notes in Math. No. 287, Springer, Berlin, 1973, pp. 265-529.