数理解析研究所講究録
第 228 巻 1975 年 51-60

Tensor product と function algebra の counter examples

茨城大 理　林 実樹広

関数環のテンソル積は，pathological example を作ることや interpolation の話に応用されたりいたしますが，テンソル積そのものが研究されたことは今のところあまりないようです。ここでは，§1 で，テンソル積の定義と基本的な性質について述べ，§2 では Sidney の example を紹介します。

§1. 関数環のテンソル積　A，B をそれぞれコンパクト空間 X，Y 上の関数環とする。 $f \in A$ と $g \in B$ に対して $X \times Y$ 上の連続関数 $f \otimes g$ を $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ により定義する。代数的なテンソル積 $A \otimes B$ は $\{f \otimes g : f \in A,\ g \in B\}$ の linear span と同一視されて，関数環 A，B のテンソル積 $A \hat{\otimes} B$ は，$A \otimes B$ の $C(X \times Y)$ における uniform closure として定義される。このとき次の事柄が成立つ

1) $\Sigma_{A \hat{\otimes} B} = \Sigma_A \times \Sigma_B$; $\Sigma_{(\cdot)}$ は spectrum (maximal ideal space

ともいう）をあらわす。

2) $\widehat{(A\hat{\otimes}B)} \cong \hat{A}\hat{\otimes}\hat{B}$；$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\widehat{(A\hat{\otimes}B)}$ はそれぞれのゲルファント変換をあらわす。とくに，関数環のテンソル積は台になる空間X，Yの定め方によらない。

3) $Ш_{A\hat{\otimes}B} = Ш_A \times Ш_B$ ；$Ш_{(\cdot)}$ は Shilov 境界をあらわす。

4) $c(A\hat{\otimes}B) = c(A) \times c(B)$ ；$c(\cdot)$ は Choquet境界（strong boundary ともいう）をあらわす。

5) $A\hat{\otimes}B$ の Gleason part は，P，Q をそれぞれ A，及び B に関する Gleason part として，$P \times Q$ という形できっちりあらわされる。

証明は，次の簡単な性質から容易にわかる。

[T1] $A\otimes B$ は $A\hat{\otimes}B$ の中で dense である。

[T2] 任意の $f \in A\hat{\otimes}B$ に対して，$f(\cdot, y) \in A$ for $\forall y \in Y$，$f(x, \cdot) \in B$ for $\forall x \in X$。

次のことも成立つ

6) $E \subseteq X$，$F \subseteq Y$ をそれぞれ A，B に関する peak set 〖interpolation set〗とすると，$E \times F$ は $A\hat{\otimes}B$ に関する peak 〖interpolation set〗となる。

以上述べたことは関数環の任意の族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ のテンソル積 $\hat{\bigotimes}_{\alpha \in S} A_\alpha$ に対しても同じように成立する。

<u>Note</u>　interpolation set については，次のような一般化が

なされている[3]: Aを$C(X)$のclosed subspace, BをBanach spaceとして, $A\otimes B$を$C(X,B)$[XからBへの連続関数全体]のsubspaceと見てのclosureにより$A\hat{\otimes}B$を定義する。EをXの閉集合として, $(A\hat{\otimes}B)|_E=C(E,B)$となるとき, EをAのB-interpolation setということにすると, 次の事柄は同値である。

a) 任意のBanach space Bに対して, EはAのB-interpolation setである。

b) EはAのℓ^1-interpolation setである。

c) 定数$M>0$があって, Eの互いに交じわらないclosed subset $K_1,\dots,K_n$及び任意の$\varepsilon>0$に対して, $g_1,\dots,g_n\in A$があって, $g_i|K_j=\delta_{ij}$かつ$\|\sum_{i=1}^{n}|g_i|\|_X\le M+\varepsilon$.

Aが関数環のときは, EがAのinterpolation setということとc)とは同値である[Aが単にsubspaceというだけでは, 同値とならないそうです]。(Note 終)

以上の基本的な性質を一歩はずれると, 関数環のテンソル積でおかしなことや, わからないことが沢山あります。

例1.1　$\Delta=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$として, Δ^nをpolydiscとする。$H^\infty(\Delta^n)$をΔ^n上の有界正則関数の全体, $A(\bar{\Delta}^n)$を$\bar{\Delta}^n$上連続で, Δ^n上で正則な関数の全体とする。このとき$A(\bar{\Delta})\hat{\otimes}A(\bar{\Delta})=A(\bar{\Delta}^2)$であるのに対して, $H^\infty(\Delta)\hat{\otimes}H^\infty(\Delta)\subsetneq H^\infty(\Delta^2)$である; 実際, Δ^2からΔへの写像$(z,w)\longmapsto zw$は$\Sigma_{H^\infty(\Delta^2)}$から$\Sigma_{H^\infty(\Delta)}$への写像に連続

延長出来るのに，$\Sigma_{H^\infty(\Delta)} \times \Sigma_{H^\infty(\Delta)}$から$\Sigma_{H^\infty(\Delta)}$へは連続に延長されない［たとえば，$e^{\frac{zw+1}{zw-1}}$を考えて，$z$をnontangentialに，$w$はtangentialに$1$に収束させるフィルターを考えて見ればよい。――別証明が[1]，[6]にある。とくに[1]は興味ある］。

例 1.2　$A(\bar{\Delta}^2)$のShilov境界は$T^2=\{(z,w) : |z|=|w|=1\}$であるが，この中で，$\{(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : 0\leq\theta\leq 2\pi\}$は*peak interpolation set*であるが，$\{(e^{i\theta}, e^{i\theta}) : 0\leq\theta\leq 2\pi\}$はpeak setでもinterpolation setでもない。　とくに，$E\subseteq X\times Y$のすべての切り口$E\cap X_y$，$E\cap Y_x$ for $\forall x\in X$, $\forall y\in Y$，が*peak set*でも，Eが*peak set*とは限らない)； $X_y=\{(x,y) : x\in X\}$，$Y_x=\{(x,y) : y\in Y\}$とする。

$\boxed{\text{Q1}}$　$A\hat{\otimes}B$の*peak set*, *interpolation set*は，A及びBの言葉で特徴付けられるか？

例 1.3　$A(\bar{\Delta})$の原点0におけるT上の表現測度は$\frac{1}{2\pi}d\theta$ 1個だけであるが，$A(\bar{\Delta}^2)$のT^2上の表現測度は無限次元である［$e^{i\theta}\mapsto(e^{i\theta}, e^{in\theta})$によって$\frac{1}{2\pi}d\theta$から$T^2$上に導入される測度はすべて$A(\bar{\Delta}^2)$に関する$(0,0)$の表現測度になっている］。

$\boxed{\text{Q2}}$　$A\hat{\otimes}B$の表現測度や，*anihilator*をA及びBの言葉で特徴付けられるか？

例 1.4　$\mathbb{C}^n$のコンパクト集合Xに対して，$A(X)$をX上連続でXの内部で正則な関数の全体，$R(X)$を有理関数で，分母がX上で0とならないもの全体のX上でのuniform closureと

とするとき，$R(X\times Y)=R(X)\hat{\otimes}R(Y)$ となるが，

$\boxed{Q3}$ $A(X)\hat{\otimes}A(Y) = A(X\times Y)$？

[付記] テンソル積の性質T1]，T2] のうち，T1] の方は $\Sigma_{A\hat{\otimes}B}$ を決定するときにしか使われない。そこで，T2] だけを取り出して，次のようなテンソル積(?)を考えてみた：

$A\boxtimes B=\{f\in C(X\times Y): f(\cdot,y)\in A \text{ for } {}^\forall y\in Y,\ f(x,\cdot)\in B \text{ for } {}^\forall x\in X\}$.

この定義では，$A(X)\boxtimes A(Y)=A(X\times Y)$ となる。このテンソル積⊠も台となる空間X，Yの定め方によらない，i.e.，$A\boxtimes B=(\hat{A}\boxtimes\hat{B})|_{X\times Y}$ となる。ところが，$A\boxtimes B$ の spectrum が $\Sigma_A\times\Sigma_B$ に一致するかどうかわからない [Xが $\mathbb{C}^1$ のコンパクト集合のときには，任意の関数環Bに対して，$\Sigma_{A(X)\boxtimes B}=\Sigma_{A(X)}\times\Sigma_B$ となることが示めせる]．

$\boxed{Q4}$ $H^\infty(\Delta)\boxtimes H^\infty(\Delta) = H^\infty(\Delta)\hat{\otimes}H^\infty(\Delta)$？

$A(X)\boxtimes A(Y) = A(X)\hat{\otimes}A(Y)$？

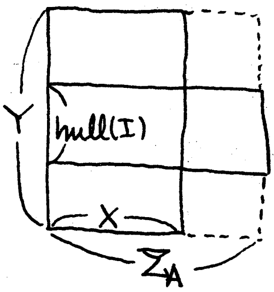
$R(X)\boxtimes R(Y) = R(X)\hat{\otimes}R(Y)$？

$\boxed{Q5}$ また，左辺の spectrum は何んか？

§2. <u>Sidneyのexample</u> Sidneyが[5]で与えた例を紹介する。A'，Bをそれぞれ $X=\Sigma_{A'}$, $Y=\Sigma_B$ 上の関数環とする。AをX上の A' に包まれる関数環，IをBの closed ideal とする。このとき，$\mathfrak{A}=(A'\otimes I+A\otimes B)^-$ により $C(X\times Y)$ の closed subalgebra

を定義すると

<u>Theorem</u> 次の事柄が成立つ:



1) $A\hat{\otimes}B \subseteq \mathfrak{A} \subseteq A'\hat{\otimes}B$

2) $f\in\mathfrak{A},\ y\in hull(I) \Rightarrow f(\cdot,y)\in A$

3) $\Sigma_{\mathfrak{A}} = (\Sigma_A\times hull(I))\cup(X\times Y)$

4) $\{Ш_{A'}\times(Ш_B\setminus hull(I))^-\}\cup\{Ш_A\times Ш_B\}\subseteq Ш_{\mathfrak{A}}\subseteq Ш_{A'}\times Ш_B$

5) A', A の X 上での Gleason part relation が一致している(Gleason metric が一致する必要はない)ならば, $\mathfrak{A}$ に関する Gleason part はきっちり $(P_1\times P_2)\cap\Sigma_{\mathfrak{A}}$ であらわされる; ここで, P_1, P_2 はそれぞれ A 及び B に関する Gleason part。

[証明] 5)において, $a\in\Sigma_{\mathfrak{A}}\setminus X$ のとき, 切り口 $Y_a\cap\Sigma_{\mathfrak{A}}$ 上の $\mathfrak{A}$ に関する part relation が B に関するものと一致していることだけを示めす。もし, y, $y'\in hull(I)$ が B に関して同じ part に入っていれば, a の A に関する表現測度を μ として, $f\in\mathfrak{A}$ のとき $f(\cdot,y)$, $f(\cdot,y')\in A$ となるから

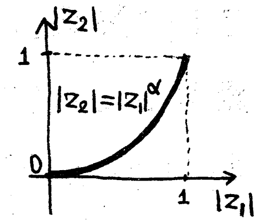
$$f(a,y)-f(a,y')=\int(f(x,y)-f(x,y'))\,d\mu(x)。$$

$x\in X$ に対しては, $f(x,\cdot)\in B$ であるから, $|f(x,y)-f(x,y')|\leq \|y-y'\|_B\|f\|$。よって $|f(a,y)-f(a,y')|\leq\|y-y'\|_B\|f\|$ となり (a,y) と (a,y') は $\mathfrak{A}$ に関して同じ part に入る。逆は, スグにわかる//

例 2.1 α を正の無理数, m を T^2 上の Haar measure として

$$A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{f\in C(T^2) : \int_{T^2} f(t_1,t_2)\,t_1^k t_2^l\, dm(t_1,t_2)=0 \ \text{ for } k+\alpha l>0\}$$
$$= \text{closed linear span}\{z_1^k z_2^l : k+\alpha l>0\}$$

はよく知られたT^2上のmaximalな関数環である。Σ_{A_α}は図の実線であらわされた曲線に対応する$\mathbb{C}^2$のsubsetに同一視され，原点$\varphi_0=(0,0)$は1点だけでA_αのpartになっている。



$A=C(T^2)$として，$\mathfrak{A}=(C(T^2)\otimes I+A_\alpha\otimes B)^-$はTheoremの5)の仮定をみたしている。よって，PをBの一つのGleason partとすれば，$\{\varphi_0\}\times\{hull(I)\cap P\}$は$\mathfrak{A}$の1つのGleason partとなる——Garnettのconstructionの本質的な部分，ただし，作り方に多少の差がある。

例2.2　$A=C(X)$, $B=A(\Delta^S)=\hat{\otimes}_{s\in S}A(\Delta_s)$とする。$B_q$を座標関数$z_s$の$q$次の同次多項式全体のclosureとすると，$B=(\sum_{q\geq 0}B_q)^-$となる。$f\in C(X)\hat{\otimes} B$を$C(X)$の元を係数として$\{z_s\}$に関してテイラー展開したときの$q$次の同次式の部分$f_q$が定義出来る。実際 $f(x,z)=\sum_q\sum_{|\nu|=q} f_\nu(x)z^\nu$（有限和）; $\nu=(\nu_s)$, $\nu_s\geq 0$, $|\nu|\equiv\sum_s \nu_s$, $z^\nu\equiv\prod_s z_s^{\nu_s}$, に対して，その$q$次の同次式$\sum_{|\nu|=q}f_\nu(x)z^\nu$を対応させるoperatorがboundedとなることが示めせる［多変数のSchwarzの補題を作って，変数z_sの個数に関係しない定数でノルムをおさえる］。さて，AをX上の関数環で，$\varphi_0\in\Sigma_A\setminus X$とする。IはBのclosed idealで$I=(\sum_{q\geq 1}I_q)^-$, $I_q=B_q\cap I$となるものとする［たとえば，$z_sI_q\subseteq I_{q+1}$; $\forall s\in S$, $\forall q\geq 0$, となる

B_gのsubspaceの族$\{I_g\}_{g\geq 1}$に対し, $I=(\sum_g I_g)^-$とおけばよい]。更に各gに対し, B_gのclosed subspace J_gがあって$B_g=I_g\oplus J_g$と直和に書かれるものとする[SがfiniteならB_gは有限次元で, これは無条件に成立つ]。$I_0=\{0\}$, $J_0=B_0\cong\mathbb{C}$とする。$\mathbb{C}^S$の原点$\bar{0}$はhull(I)に含まれるから, $\varphi=(\varphi_0,\bar{0})\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$。$\mathfrak{A}_\varphi=\{f\in\mathfrak{A}:\varphi(f)=0\}$と($A_{\varphi_0}$, $B_{\bar{0}}$も同様に)定義する。以上の条件のもとに, $\mathfrak{A}$のφにおける形式的なテイラー展開$\sum_{n=0}^{\infty}\oplus(\mathfrak{A}_\varphi^n)^-/(\mathfrak{A}_\varphi^{n+1})^-$がexplicitに計算出来る。すなわち, $\mathfrak{A}_\varphi=(A'\otimes I+A_{\varphi_0}\otimes B+A\otimes B_{\bar{0}})^-$ということから,

$$(\mathfrak{A}_\varphi^n)^-=(A'\otimes I+\sum_{g=0}^{n-1}A_{\varphi_0}^{n-g}\otimes B_g+A\otimes B_{\bar{0}}^n)^-$$
$$=\sum_{g=0}^{n-1}\oplus(A'\otimes I_g+A_{\varphi_0}^{n-g}\otimes J_g)^-\oplus[\sum_{g\geq n}(A'\otimes I_g+A\otimes J_g)]^-$$

$$(\mathfrak{A}_\varphi^n)^-/(\mathfrak{A}_\varphi^{n+1})^-\cong\sum_{g=0}^{n}\oplus(A_{\varphi_0}^{n-g}\otimes J_g)^-/(A_{\varphi_0}^{n+1-g}\otimes J_g)^-\quad(\text{ただし, }A_{\varphi_0}^0=A)。$$

ここで, 更に$A'=C(\mathbb{T}^2)$, $A=A_\alpha$, $\varphi_0=(0,0)$とすると, $A_{\varphi_0}=(A_{\varphi_0}^2)^-$となることが知られている([4])ので,

$$(\mathfrak{A}_\varphi^n)^-/(\mathfrak{A}_\varphi^{n+1})^-\cong(A_\varphi^0\otimes J_n)^-/(A_{\varphi_0}\otimes J_n)^-\cong J_n\cong B_n/I_n$$

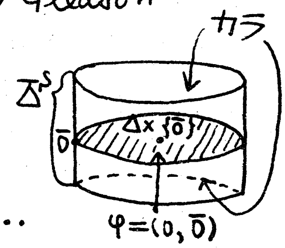
となる(A', Aは消えてしまう!)。とくに, $S=\{1,\dots,r\}$のときを考える。$\mathbb{C}[X_1,\dots,X_r]$のideal $\mathcal{J}=\sum\mathcal{J}_g$は, $X_s\mathcal{J}_g\subseteq\mathcal{J}_{g+1}$; $\forall X_s$, となるとき, homogeneous idealといわれる。$X_1,\dots,X_r$に変数$z_1,\dots,z_r$を代入すれば, $\mathcal{J}_g$に対応して, B_gのsubspace I_gが定まり, $I=(\sum I_g)^-$はBのclosed idealとなる。有限次元

ということから，$B_\xi = I_\xi \oplus J_\xi$ と直和に分解して，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\oplus(\mathfrak{a}_\varphi^n)^-/(\mathfrak{a}_\varphi^{n+1}) \cong \mathbb{C}[X_1,\dots,X_r]/\mathfrak{J}$$

となる――左辺は関数のテイラー展開なのに，右辺は全く代数的であるためにおかしなことが起っている。というのは，右辺を関数とみるときは，variety $hull(\mathfrak{J}) = hull(Rad\,\mathfrak{J})$ 上の関数，すなわち，$\mathbb{C}[X_1,\dots,X_r]/\mathfrak{J}$ の元とみなさなくてはならないからである。たとえば，$\mathfrak{J} = \{z_1^2, z_1z_2, z_2^2\}$ のとき，$hull(\mathfrak{J}) = \{(0,0)\}$ 上の関数は trivial しかないのに，左辺からは trivial でないテイラー展開をもつ関数があらわれる。

例2.3　最後に T. T. Read (c.f. [6] p153) の作った例を上げる； $A' = C(\bar{\Delta})$, $A = A(\bar{\Delta})$, $B = A(\Delta^S)$, $I = (B_0^k)^- = (\sum_{\xi \geq k} B_\xi)^-$ とする。このとき，$hull(I) = \{\bar{0}\}$。よって $\Delta\times\{\bar{0}\}$ は $\mathfrak{A}$ の Gleason part で weak topology で open になっている。ところが，



$$\sum_{n=0}^{\infty}\oplus(\mathfrak{a}_\varphi^n)^-/(\mathfrak{a}_\varphi^{n+1})^- \cong B_0\oplus B_1\oplus\cdots\oplus B_k\oplus\{0\}\oplus\{0\}\cdots$$

であり，とくに $B_1 = \mathfrak{a}_\varphi/(\mathfrak{a}_\varphi^2)^-$ は無限次元である。$\mathfrak{a}_\varphi/(\mathfrak{a}_\varphi^2)^-$ 上の linear functional は φ における point derivation（幾何的な接ベクトルに対応する）は連続なものだけでも無限次元となる――一次元の analytic disc $\Delta\times\{\bar{0}\}$ 上に無限次元の接ベクトルがあることになる！

以上，いくつかの例を紹介したが，part や point derivation

それにanalytic structureなどに関連した例がこの他にも色々考えられる。

References

1. Birtel, F.T., and E. Dubinski, Bounded analytic functions of two complex variables, Math. Z. 93 (1966), 299-310.

2. Blumenthal, R.G., The spectrum of a function algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 343-346.

3. Oberlin, D.M., Interpolation and vector-valued functions, J. Funct. Anal. 15 (1974), 428-439.

4. Sidney, S.J., Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 119-127.

5. ______, Properties of the sequence of closed powers of a maximal ideal in a sup-norm algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 128-148.

6. Stout, E.L., The Theory of Uniform Algebras, Bogden & Quigley, Inc., Now York, 1971.