数理解析研究所講究録
第 229 巻 1975 年 29-36

セル構造オートマトンによる並列処理

京大理学部　　西尾英之助

I。序論

セル構造オートマトンは 1)同一の素子が 2)多数結合されてできる系である。 Von Neumann はこの様な系の逐時的動作によってオートマトンやチューリング機械の埋込みの問題を扱い，自己増殖の論理モデルを作った。[1] 逐時動作というのは，ある時点で状態変化をする素子が1個であり，かつその素子が空間的に隣合った素子に順に移ってゆく動作形式のことである。 残りの素子は状態変化をしない。 このような静状態の素子は，しかるべき時期が来るまで待っていると考えれば，やはり処理目的に貢献していることになる。

Von Neumann の仕事の直後から始まった Moore, Myhill などによる"エデンの園問題"は"一斉射撃問題"(同期問題)[2]を生んだ。 これは同時に全素子が同じ状態になることを要求するのだから少なくとも最後の瞬間には全素子の並列動作が必要である。 さらに問題は最短時間解を求めることになったから，並列動作の必要性が高まった。

他方一般に情報処理系については原理的に処理目的が達せられるか否かの問題と同時に所要時間の問題がある。 計算

機システムが大型化して多数の装置が組込まれるにつれて，それらを並列動作させるモニターが必要になった。こうしてみると処理時間を短かくするために並列処理が必要になったように見えるが，本来処理されるべき情報が空間的拡がりを持っているから並列に処理される場合もある。視覚情報の処理はそうで，人工の装置で逐時処理をするのは，経済性と考え易さのためである。

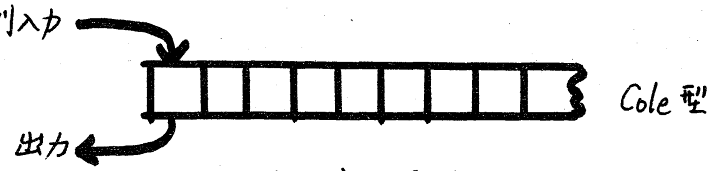
2。処理目的とセル構造のモデル

系への入力の与え方と結果の取出し方の違いによって，解析方法や論じうる命題，所要時間の長短など，大いに違ってくる。従来扱かわれたモデルに言及しながらこの点を整理してみる。

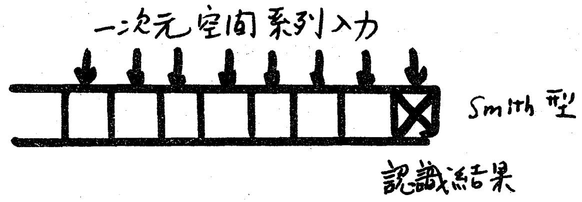
1) 入力情報が一次元の場合；

◎時間的に一次元（空間的に0次元）で方向性を持った，形式言語のような情報を空間的に一次元（あるいはn次元）のセル構造で処理するモデル――これは言語認識モデルとしてCole[3]が用いたので，Cole型と云おう。Fischer[4]が実時間で"素数タイミング"を発生する系をつくったし，Бухштаб[5]や有沢[6]が実時間で計算できる関数を論じた。これらが一次元のセル構造の並列処理能力を利用していることはいうまでも

ない。



◎空間的に一次元の場合は Smith[7]が形式言語認識のモデルとして用いた。



入力系列は系の初期状態として与えられ，系は自律動作をする。結果はある特定の一素子に出る。後で述べる"並列・実時間ソート"のモデル[8]では結果は全セルの最終状態として与えられる。一斉射撃や"French Flag問題"[9]もこのような入出力の与え方の例である。まとめて，一次元空間パターンの（実時間）変換の問題と云えよう。Cole型で時間系列の実時間変換を扱った論文はまだない。

2) 入力情報が二次元の場合：

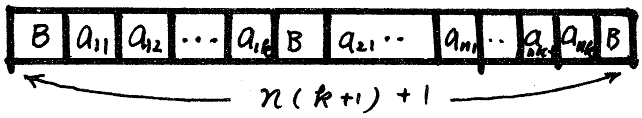
◎ 時間＋空間で二次元の情報はまだセル構造で扱かわれていない。Hennie[10]の iterative array も主な結果は時間的に拡がりのない場合についてである。関[11]がこのような情報の認識問題を考えているがまだ明確な結果が出ていない。

◎ 空間的に二次元の場合は Smith型で図形認識が扱かわれている。Unger[12], Papert, Minsky[13], Beyer[14], 稲垣[15]など。しかし処理時間や並列処理の点で系統立った議論は少ない。Smith[10]。いずれも認識問題で，変換問題としては，一斉

射撃の二次元への（本質的ではない）拡張[17)]があるくらいである。

3. 2進数の実時間ソート[8)]

n個のk-bit 2進数の列$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$が与えられたとき，図のようにSmith型の系を用いて，大きさの順に並べ換える問題。ただし数a_iは$a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik}$と表現され，数の区切り記号Bを用いる。



系の素子はn, kに依存しない有限オートマトンで，ソート終了時点で系は自働的に停止せねばならない。

入力情報の量は$n(k+1)+1$だから，$n \cdot k$のorderの時間でソートが完了する解を求める。

◎解の概要：

a) local three-sort T: つぎのように数の3組の列の変換Tを考える。

$$x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_i\\\beta_i\\\gamma_i\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_n\\\beta_n\\\gamma_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\infty\\\infty\\\infty\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\infty\\\infty\\\infty\end{pmatrix}$$

$$= x_{-1}\, x_0\, x_1\, x_2 \cdots x_i \cdots x_n\, x_{n+1}\, x_{n+2}$$

$$T(x) = x_{-1}'\, x_0'\, x_1' \cdots x_i' \cdots x_n'\, x_{n+1}'\, x_{n+2}'$$

ただし

$$x_i' = \begin{pmatrix}\alpha_i'\\\beta_i'\\\gamma_i'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\min(\gamma_{i-1}, \beta_i, \alpha_{i+1})\\ \mathrm{mid}(\gamma_{i-1}, \beta_i, \alpha_{i+1})\\ \max(\gamma_{i-1}, \beta_i, \alpha_{i+1})\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, \cdots, n+1 \\ x_{-1}' = x_{-1}, \quad x_{n+2}' = x_{n+2} \end{array}$$

$0, \infty$は考えている数より小，大の数を示す記号。

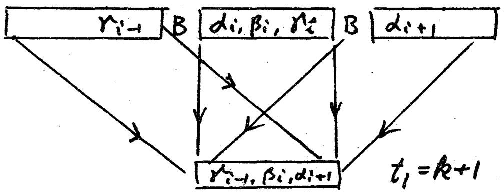
いまソートすべき数の列 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ に対して，$x_i = \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \\ a_i \end{pmatrix}$ なる3組を対応させて，その列 $x = x_{-1} x_0 x_1 \cdots x_n x_{n+1} x_{n+2}$ をつくる。 x に local three sort T を施すと，やはり同様の3組の列が得られる。 この T はつぎの性質を持っている。

［命題］ T を高々 $1.5n$ 回施させば，$\beta_1'' \beta_2'' \cdots \beta_n''$ は $a_1 a_2 \cdots a_n$ のソート結果になっている。（証明未完）

b) セル構造オートマトンによる T の実現：

初期状態：各素子は，a_{ij}（0または1）の3組 $\begin{pmatrix} a_{ij} \\ a_{ij} \\ a_{ij} \end{pmatrix}$，あるいは区切記号 B の状態とする。 数 a_i に対応する系の部分を i-block と呼ぶ。

phase 1： $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ は単位時間の遅れで，夫々左，中，右へ走る。 $(k+1)$ 時間後に i-block 上で $\gamma_{i-1,j}, \beta_{ij}, \alpha_{i+1,j}$ $(j = 1, \cdots, k)$ が衝突する。



phase 2： bitごとの大小比較をし，同一ブロックの全素子にその結果を配る。 すなわち，

$\gamma_{i-1,1} \cdots \gamma_{i-1,k} = x_1 x_2 \cdots x_k$，$\beta_{i1} \cdots \beta_{ik} = y_1 \cdots y_k$，$\alpha_{i+1,1} \cdots \alpha_{i+1,k} = z_1 \cdots z_k$ とすれば，例えば，$\xi = \xi_1 \cdots \xi_k$ $\xi_i = \phi$ $(x_i = y_i)$，$\xi_i = 0$ $(x_i < y_i)$，$\xi_i = 1$ $(x_i > y_i)$ のようなベクトルを3個つくる。 これは1時間で出来る。 もし $x > y$ なら ξ_i の最高位から はじめて ϕ でない桁が1となっているので，それを i-block

の全素子に配る。同様に、他の2組($x-z$, $y-z$)の比較結果も並行して全素子に配る。これらを($\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\zeta}$)とすれば、つぎの判定表によって、x, y, zの大小順がきめられる。

min	mid	max	
x	y	z	$\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$が1を含まないとき。
y	x	z	$\hat{\xi}=1$, $\hat{\eta}\neq 1$, $\hat{\zeta}\neq 1$
x	z	y	$(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta})=(\phi\phi 1), (\phi 1 \phi), (001), (0\phi 1)$
z	x	y	$\hat{\xi}\neq 1$, $\hat{\eta}=\hat{\zeta}=1$
y	z	x	$\hat{\xi}=\hat{\eta}=1$, $\hat{\zeta}\neq 1$
z	y	x	$\hat{\xi}=\hat{\eta}=\hat{\zeta}=1$

従って各素子(bit)ごとに新しい$\alpha_{ij}', \beta_{ij}', \gamma_{ij}'$がきめられた。bitごとの大小比較を数の大小比較にし、全素子に配り、上記表をひく操作は、合わせてk時間で済む。この時間はphase 1と合わせて、$k+1+1+k=2k+2$で、local three sortの一回分が終了した時点である。

同期の問題: 各素子はphase 1, 2の終了時点で別の処理に移らねばならないから、その時刻を一斉に知る必要がある。kは任意だから、素子内に時計を持つことは出来ないので、一斉射撃の手法を利用する。区切記号Bのセルが両端にあるから、長さkの各ブロック内でk時間で同期がとれる。これは上述のphase 1, 2が$k+1$時間で済むのと矛盾し

ない。最後に、[命題]により、$1.5n$ 回の T の適用でソートが終了するから、その時刻、$1.5n \cdot 2(k+1) = 3n(k+1)$ を全素子を使った同期問題の解としておめることができる。

結局、おめる素子は、本来の処理(phase 1, 2)、と2種類の同期部分の直積の形で構成されることになる。

◎この問題の最短時間解はこれ以上だから、ここに述べた方法以外により良い設計があるかも知れない。local three sort の拡張(m-sort)もその一つの可能性である。Cole 型の実時間ソートはまだ放かれていない。

4. おわりに

いくつかの例から明らかなように、セル構造オートマトンでは、必要な情報をしかるべき位置へ伝達し処理をするが、伝達に要する時間が総時間の限界をきめる。これに反して処理装置が1個で補助記憶を持つ系では、必要な情報をさがすのに時間がかかる。今後セル構造で並列処理が適している問題を発見して、解くことにより、この系の特徴がよりよく理解されよう。しかし、並列処理を単に、処理速度を高めるという側面のみではなくて、逐時処理では実現できない状態遷移をさせるという案なども調べなければならない。

[文献]

1) Von Neumann: A.W. Burks. ed. Self-reproducing automata (1966)

2) 例えば Waksman. A: Information and Control (1966)

3) Cole, S.N: IEEE C-18 (1969)

4) Fischer, P.C: JACM 12 (1965)

5) Бухштаб, Ю.А.: Проблемы Кибернетики, (1967)

6) 有沢: 通信学会誌 54-C (1971)

7) Smith III. A.R: JCSS 6 (1972)

8) 西尾: 通信学会全国大会 S8-8 (1973)

9) Wolpert, L: in Towards a Theoretical Biology I. (1968)

10) Hennie, III, F.C: Iterative arrays of logical circuit, MIT Press (1961)

11) 園: 私信

12) Unger, S.H: Proc. IEEE 47 (1959)

13) Minsky. M & Papert. S.: Perceptrons, MIT Press (1969)

14) Beyer, T: PhD dissertation. MIT (1970)

15) 稲垣: 九州大学シンポジウム (1972)

16) Smith III. R.A: IEEE Switching and automata Theory (1971)