数理解析研究所講究録
第233巻 1975年 43-46

The Schur Multiplier Revisited

D. M. Goldschmidt
五味健作・記

この講演は飛び入りで行われたものである。内容は題名の示すように Schur multiplier を新しい視点から見直すというもので、新事実を含むものではない。30分という短い講演時間のため、紹介されたのは理論のさわりの部分だけである。以下、講義ノートをもとに講演の内容をまとめてみる。

G, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}G$ でそれぞれ群，有理整数環、Gの$\mathbb{Z}$上の群環を表わす。g, h, ... でGの元を表わす。εを augmentation map: $\mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$、$\Delta(G)$を augmentation ideal ($\Delta(G) = \ker\varepsilon$) とすれば、$\Delta(G)$は$\{1-g \mid g \in G\}$上の自由可換群である。$\hat{g} = 1-g$ とおけば、

$$* \qquad \hat{g}\hat{h} = \hat{g} + \hat{h} - \widehat{gh}$$

が直ちに確められる。これは基本等式であり、以後の展開で重要な役割を演じる。$*$を使って次の良く知られた補題が証明される。

補題。$0 \longrightarrow \Delta(G)^2 \hookrightarrow \Delta(G) \longrightarrow G/G'$ は完全系列。

$$\hat{g} \longmapsto G'g$$

$\Delta^{(2)}(G) = \Delta(G) \otimes_{\mathbb{Z}(G)} \Delta(G)$ とおき、$\pi : \Delta^{(2)}(G) \longrightarrow \Delta(G)$ を product map（$\pi : \hat{g} \otimes \hat{h} \longmapsto \hat{g}\hat{h}$）とし、$M(G) = \ker \pi$ と定義する。Δ、$\Delta^{(2)}$、M は群で定義され、可換群に値をとる functor である。また $M(G)$ は自然に $H_2(G, \mathbb{Z})$ と同型になる。$\mathrm{Im}\,\pi = \Delta(G)^2$ は自由可換群だから、$M(G)$ は $\Delta^{(2)}(G)$ の直和因子となる。

A を自明な G 加群、$Z^2(G, A)$ を 2-cocycle、$B^2(G, A)$ を 2-coboundary、$H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A)$ とする。理論の "Main point" は次の補題である。

補題。$f \in Z^2(G, A)$ とすれば $\hat{f}(\hat{g} \otimes \hat{h}) = f(g, h)$ なる $\hat{f} : \Delta^{(2)}(G) \to A$ があり、対応 $f \leftrightarrow \hat{f}$ は $Z^2(G, A)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta^{(2)}(G), A)$ との同型を与える。さらに、$f \in B^2(G, A)$ なるためには、ある $\varphi : \Delta(G) \to A$ によって $\hat{f} = \varphi \circ \pi$ となることが必要かつ十分。

これにより $Z^2(G, A)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta^{(2)}(G), A)$ を同一視する。この同型から準同型 $\rho : H^2(G, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A)$ が得られる。

定理 1。自然な完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G/G', A) \longrightarrow H^2(G, A) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A) \to 0$$

が存在する。この完全系列は分解する。

とくに $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ または $\mathbb{C}^*$ とすれば $H^2(G, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A)$ が得られる。

定義。$R(G) = \{(x, g) \mid x \in \Delta^{(2)}(G),\ g \in G\}$ とし、$R(G)$ の中に $(x, g)(x_1, g_1) = (x + x_1 + \hat{g} \otimes \hat{g}_1,\ g g_1)$ により積を定義する。そのとき $R(G)$ は群となる。$\Delta^{(2)}(G)$ を $\{(x, 1) \mid x \in \Delta^{(2)}(G)\}$ と同一視し、$r(g) = (0, g)$ とおく。このとき、

$$0 \longrightarrow \Delta^{(2)}(G) \hookrightarrow R(G) \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は中心拡大であり、$R(G) = \langle r(g) \mid g \in G \rangle$。

定理2。(x, g) に $\pi(x) + \hat{g}$ を対応させる $R(G)$ から $\Delta(G)$ への写像は群の全準同型であり、$\ker = R(G)'$。

系。$M(G) = \Delta^{(2)}(G) \cap R(G)'$。

定義。中心拡大 $0 \to A \xrightarrow{\tau} X \to G \to 1$ が essential であるとは $\mathrm{Im}\,\tau \subseteq X'$ なることをいう。$\tilde{R}$ が G の representation group であるとは essential な中心拡大 $0 \to M(G) \to \tilde{R} \to G \to 1$ が存在することをいう。

系。任意の G に対して、representation group が存在する。すなわち、$\Delta^{(2)}(G) = M(G) \oplus K$ とすれば $R(G)/K$ が G の representation group である。

定理3。$0 \to A \hookrightarrow X \to H \to 1$ を中心拡大とする。$f : G \to H$ が準同型ならば、可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta^{(2)}(G) & \longrightarrow & R(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \varphi & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

で次の(1)(2)を満すものが存在する。(1) $f=1$ のときは $\mathrm{Im}\,\psi|_{M(G)} = A \cap X'$ であり、$A \leq X'$ ならば φ は onto であり、φ は G の rep. group を経由して得られる (factor through)。

(2) もし $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G/G', A) = 0$ で $\widetilde{R}$ が G の rep. group なら、φ は $\widetilde{R}$ を経由するように選べる。

定理4。$1 \to N \to F \xrightarrow{\varphi} G \to 1$ を完全系列とせよ。中心拡大 $0 \to N/[N,F] \to F/[F,N] \to G \to 1$ が $\alpha \in H^2(G, N/[N,F])$ に対応するとせよ。そのとき、

$$M(F) \xrightarrow{M(\varphi)} M(G) \xrightarrow{\rho(\alpha)} N/[N,F] \longrightarrow F/F' \longrightarrow G/G' \to 0$$

は完全系列である。